НЕКОММЕРЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
УЧЕБНО-НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ КОМПЛЕКС
«МЕЖДУНАРОДНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ КЫРГЫЗСТАНА»

«СОГЛАСОВАНО»
Проректор по учебно-административной работе НОУ УНПК «МУК»,
к.ю.н., Карабалаева С.Б.
_____
«18» 11 20 19 г.

«УТВЕРЖДЕНО»
Ректор НОУ УНПК «МУК»,
к.т.н., доцент Савченко Е.Ю.
_____
«18» 11 20 19 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Название дисциплины: Теория принятия решений

Направление: 710100 «Информатика и вычислительная техника»

Профиль: Компьютерные информационные системы для бизнеса

Квалификация выпускника: Бакалавр

Форма обучения: Очная

Составитель (и): д.т.н., проф. Миркин Е.Л. _____

График проведения модулей
8-семестр

неделя	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
лекц. зан.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
лаб. зан.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

«РАССМОТРЕНО»
На заседании кафедры
«КИСиУ»
НОУ УНПК «МУК»
Протокол № 2
от «14» 10 20 10 г.
Зав. кафедрой
д.т.н., проф. Миркин Е.Л.
_____

«ОДОБРЕНО»
На заседании Учебно-методического объединения НОУ УНПК «МУК»
Протокол № 2
от «15» 11 20 19 г.
Председатель Учебно-методического объединения
Матвеева Т.В. _____

Директор Научной библиотеки
НОУ УНПК «МУК»
Асанова Ж.Ш._____

Бишкек 20 19 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

АННОТАЦИЯ **3**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЕЙ) **4**

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА **4**
1.1. Миссия и стратегия 4
1.2. Цель и задачи дисциплины 4
1.3. Формируемые компетенции, а также перечень планируемых результатов обучения по дисциплине 4
1.4. Место дисциплины (модулей) в структуре ООП ВПО 5

2. СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ **5**

4. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ **8**

5. ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ **39**

6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО, РУБЕЖНОГО И ИТОГОВОГО КОНТРОЛЕЙ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЕЙ) **42**
6.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения дисциплины 42
6.2. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности 44
6.3. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания 46
6.4. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности. 47
Контрольные вопросы 48
Тест 48

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ **62**
7.1. Список источников и литературы 62
7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимый для освоения дисциплины (модулей) 63

8. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ **64**
8.1. Планы практических (семинарских) и лабораторных занятий. Методические указания по организации и проведению 64

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ **81**

10. ГЛОССАРИЙ **81**

11. ПРИЛОЖЕНИЯ **81**

12. **82**

АННОТАЦИЯ

Изучение этой дисциплины специалистами данного направления обусловлено необходимостью приобретения практических навыков использования «методологии исследования операций» для аналитической работы в сложных экономических и организационных системах.

При изучении данной дисциплины в центре внимания находятся математические методы и модели исследования операций, применяемые в теории и практике аналитической работы специалистов данного направления.

При изучении дисциплины рассматриваются и анализируются:

- Понятия и методология исследования операций. Примеры упрощенных задач исследования операций.
- Модели операционных задач. Основные конфигурации соединения сложных экономических систем.
- Некоторые аспекты общей теории математического программирования.
- Алгоритмические методы решения оптимизационных задач.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЕЙ)

1. Пояснительная записка

1.1. Миссия и стратегия

Миссия НОУ УНПК "МУК" – подготовка международно - признанных, свободно мыслящих специалистов, открытых для перемен и способных трансформировать знания в ценности на благо развития общества. Видение НОУ УНПК «МУК»- создание динамичного и креативного университета с инновационными научно-образовательными программами и с современной инфраструктурой, способствующие достижению академических и профессиональных целей.

Стратегии развития - модернизация образовательной деятельности университета – совершенствование образовательного процесса в соответствии с требованиями Болонского процесса.

1.2. Цель и задачи дисциплины

Цель дисциплины: формирование устойчивых практических навыков использования «методологии исследования операций» для аналитической работы в сложных экономических и организационных системах.

Задачи дисциплины:

- усвоение основных положений исследования операций, как методологии анализа задач принятия решений, основных методов построения моделей и методики проведения исследования операций.
- знакомство с типовыми динамическими моделями макро и микро экономики, предназначенными для решения задач, анализа и прогнозирования экономических систем;
- усвоение основных идей и понятий оптимизации, изучение критериев оптимальности, алгоритмических методов решения оптимизационных задач;
- освоение компьютерных инструментальных средств (система MATLAB) для решения задач идентификации, прогнозирования и оптимизации экономических систем.

1.3. Формируемые компетенции, а также перечень планируемых результатов обучения по дисциплине

Дисциплина «Теория принятия решений» направлена на формирование следующих компетенций:

- *общенаучными (*ОК-4*):*
  - способен понимать и применять традиционные и инновационные идеи, находить подходы к их реализации и участвовать в работе над проектами, используя базовые методы исследовательской деятельности (ОК-4);
- *профессиональными* (ПК-1, ПК-8)*:*
  - способен разрабатывать бизнес-планы и технические задания на оснащение отделов, лабораторий, офисов компьютерным и сетевым оборудованием (ПК-1);
  - способен готовить конспекты и проводить занятия по обучению сотрудников применению программно-методических комплексов, используемых на предприятии (ПК-8).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

1. Знать:

- основные методы оптимизации, используемые для алгоритмизации;
- понятия и методология исследования операций;

2. *Уметь:*

- применять методологию системного анализа для аналитического исследования сложных экономических и организационных систем;
- понимать постановку оптимизационных задач, алгоритмизировать их в виде основных этапов решения;

3. *Владеть:*

- устойчивые навыки программирования и использования компьютерных инструментальных средств (MATLAB) для решения оптимизационных задач.

1.4. Место дисциплины (модулей) в структуре ООП ВПО

Дисциплина (модуль) «Теория принятия решений» является частью профессионального цикла (блока) дисциплин учебного плана по направлению подготовки 710100 «Информатика и вычислительная техника» подготовки бакалавров (специализации Компьютерные информационные системы в бизнесе).

Для освоения дисциплины (модулей) необходимы компетенции, сформированные в ходе изучения следующих дисциплин: основные разделы математики, программирования.

В результате освоения дисциплины (модулей) формируются компетенции, необходимые для изучения следующих дисциплин и прохождения практик: интеллектуальные системы управления, нейросетевые технологии.

2. Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 кредита, 120ч., в том числе аудиторная работа обучающихся с преподавателем 60 ч., самостоятельная работа обучающихся 60 ч.

№ п/п	***Раздел, Темы Дисциплины***	***Семестр***	***Неделя семестра***	***Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)***	***Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)***

				Лекции 15 ч	***Лаб. Зан. 45ч***	***СРС 42ч***	***СРСиП 18ч***	
1	Причины возникновения исследования операций.			*1*	*3*	*3*	*2*	
2	Предмет исследования операций. Классы операционных задач.			*1*	*3*	*3*	*2*	
3	Примеры упрощенных задач исследования операций.			*1*	*3*	*3*	*2*	
4	Задача оптимизации поставок скоропортящихся товаров.			*1*	*3*	*3*	*1*	
5	Задача прогнозирования спроса на товары длительного пользования с помощью логистической функции.			*1*	*3*	*3*	*1*	
6	Описание моделей динамических систем.			*1*	*3*	*3*	*1*	*Сдача модуля*
7	Линейные непрерывные системы. Линейные дискретные системы.			*1*	*3*	*3*	*1*	
8	Основные конфигурации соединения динамических систем (последовательное, параллельное соединение, конфигурация систем с обратной связью).			*1*	*3*	*3*	*1*	
9	Модели операционных			*1*	*3*	*2*	*1*	

	задач. Функции моделей.							
10	Классификация и структура моделей. Задачи анализа, управления и идентификации.			*1*	*3*	*2*	*1*	*Сдача модуля*
11	Функциональные блоки сложных систем (элементы преобразования, сортировки и обратной связи). Математические модели элементов системы.			*1*	*3*	*2*	*1*	
12	Структурные схемы системы. Основные конфигурации соединения систем. Системы с дискретным временем. Модель склада.			*1*	*3*	*2*	*1*	
13	Методика проведения исследования операций. Основные этапы исследования операций. Определение целей.			*1*	*3*	*2*	*1*	
14	Составление плана разработки проекта. Формулировка проблемы. Построение модели. Разработка вычислительного метода.			*1*	*2*	*2*	*1*	*Сдача модуля*
15	Разработка ТЗ на программирование. Программирование и отладка. Сбор данных. Проверка моделей. Реализация результатов.			*1*	*1*	*2*	*1*	

4. Конспект лекций

Общая постановка задачи о принятии решения

Процессы принятия решений лежат в основе любой целенаправленной деятельности. В экономике они предшествуют созданию производственных и хозяйственных организаций, обеспечивают их оптимальное функционирование и взаимодействие”. В научных исследованиях – позволяют выделить важнейшие научные проблемы, найти способы их изучения, предопределяют развитие экспериментальной базы и теоретического аппарата. При создании новой техники – составляют важный этап в проектировании машин, устройств, приборов, комплексов, зданий, в разработке технологии их построения и эксплуатации; в социальной сфере – используются для организации функционирования и развития социальных процессов, их координации с хозяйственными и экономическими процессами. Оптимальные (эффективные) решения позволяют достигать цели при минимальных затратах трудовых, материальных и сырьевых ресурсов.

В классической математике методы поиска оптимальных решений рассматривают в разделах классической математики, связанных с изучением экстремумов функций, в математическом программировании.

Математическое программирование является одним из разделов исследования операций – прикладного направления кибернетики, используемого для решения практических организационных задач. Задачи математического программирования находят применение в различных областях человеческой деятельности, где необходим выбор одного из возможных образов действий (программ действий).

Значительное число задач, возникающих в обществе, связано с управляемыми явлениями, т. е. с явлениями, регулируемыми на основе сознательно принимаемых решений. При том ограниченном объеме информации, который был доступен на ранних этапах развития общества, принималось оптимальное в некотором смысле решение на основании интуиции и опыта, а затем, с возрастанием объема информации об изучаемом явлении, – с помощью ряда прямых расчетов. Так происходило, например, создание календарных планов работы промышленных предприятий.

Совершенно иная картина возникает на современном промышленном предприятии с многосерийным и многономеклатурным производством, когда объем входной информации столь велик, что его обработка с целью принятия определенного решения невозможна без применения современных электронных вычислительных машин. Еще большие трудности возникают в связи с задачей о принятии наилучшего решения.

Под *принятием решений* в исследовании операций понимают сложный процесс, в котором можно выделить следующие основные этапы:

1-й этап. Построение качественной модели рассматриваемой проблемы, т. е. выделение факторов, которые представляются наиболее важными, и установление закономерностей, которым они подчиняются. Обычно этот этап выходит за пределы математики.

2-й этап. Построение математической модели рассматриваемой проблемы, т. е. запись в математических терминах качественной модели. Таким образом, математическая модель – это записанная в математических символах абстракция реального явления, так конструируемая, чтобы анализ ее давал возможность проникнуть в сущность явления. Математическая модель устанавливает соотношения между совокупностью переменных – параметрами управления явлением. Этот этап включает также построение целевой функции переменных, т. е. такой числовой характеристики, большему (или меньшему) значению которой соответствует лучшая ситуация с точки зрения принимающего решения.

Итак, в результате этих двух этапов формируется соответствующая математическая задача. Причем, второй этап уже требует привлечения математических знаний.

3-й этап. Исследование влияния переменных на значение целевой функции. Этот этап предусматривает владение математическим аппаратом для решения математических, задач, возникающих на втором этапе процесса принятия, решения.

Широкий класс задач управления составляют такие экстремальные задачи, в математических моделях которых условия на переменные задаются равенствами и неравенствами. Теория и методы решения этих задач как раз и составляют содержание математического программирования. На третьем этапе, пользуясь математическим аппаратом, находят решение соответствующих экстремальных задач. Обратим внимание на то, что задачи математического программирования, связанные с решением практических вопросов, как правило, имеют большое число переменных и ограничений. Объем вычислительных работ для нахождения соответствующих решений столь велик, что весь процесс не мыслится без применения современных электронных вычислительных машин (ЭВМ), а значит, требует либо создания программ для ЭВМ, реализующих те или иные алгоритмы, либо использования уже имеющихся стандартных программ.

4-й этап. Сопоставление результатов вычислений, полученных на 3-м этапе, с моделируемым объектом, т. е. экспертная проверка результатов (критерий практики). Таким образом, на этом этапе устанавливается степень адекватности модели и моделируемого объекта в пределах точности исходной информации. Здесь возможны два случая:

- *1-й случай*. Если результаты сопоставления неудовлетворительны (обычная ситуация на начальной стадии процесса моделирования), то переходят ко второму циклу процесса. При этом уточняется входная информация о моделируемом объекте и в случае необходимости уточняется постановка задачи (1-й этап), уточняется или строится заново математическая модель (2-й этап), решается соответствующая математическая задача (3-й этап) и, наконец, снова проводится сопоставление (4-й этап).
- *2-й случай*. Если результаты сопоставления удовлетворительны, то модель принимается. Когда речь идет о неоднократном использовании на практике результатов вычислений, возникает задача подготовки модели к эксплуатации. Предположим, например, что целью моделирования является создание календарных планов производственной деятельности предприятия. Тогда эксплуатация модели включает в себя сбор и обработку информации, ввод обработанной информации в ЭВМ, расчеты на основе разработанных программ календарных планов и, наконец, выдачу результатов вычислений (в удобном для пользователей виде) для их использования в сфере производственной деятельности.

В математическом программировании можно выделить *два направления*.

К *первому*, уже вполне сложившемуся направлению – собственно *математическому программированию* – относятся детерминированные задачи, предполагающие, что вся исходная информация является полностью определенной.

Ко *второму* направлению – так называемому *стохастическому программированию* – относятся задачи, в которых исходная информация содержит элементы неопределенности, либо когда некоторые параметры задачи носят случайный характер с известными вероятностными характеристиками. Так, планирование производственной деятельности зачастую производится в условиях неполной информации о реальной ситуации, в которой будет выполняться план. Или, скажем, когда экстремальная задача моделирует работу автоматических устройств, которая сопровождается случайными помехами. Заметим, что одна из главных трудностей стохастического программирования состоит в самой постановке задач, главным образом из-за сложности анализа исходной информации.

Традиционно в математическом программировании выделяют следующие основные разделы.

Линейное программирование – целевая функция линейна, а множество, на котором ищется экстремум целевой функции, задается системой линейных равенств и неравенств. В свою

очередь в линейном программировании существуют классы задач, структура которых позволяет создать специальные методы их решения, выгодно отличающиеся от методов решения задач общего характера. Так, в линейном программировании появился раздел *транспортных задач*.

Нелинейное программирование – целевая функция и ограничения нелинейны. Нелинейное программирование принято подразделять следующим образом:

Выпуклое программирование – целевая функция выпукла (если рассматривается задача ее минимизации) и выпукло множество, на котором решается экстремальная задача.,

Квадратичное программирование – целевая функция квадратична, а ограничениями являются линейные равенства и неравенства.

Многоэкстремальные задачи. Здесь обычно выделяют специализированные классы задач, часто встречающихся в приложениях, например, задачи о минимизации на выпуклом множестве вогнутых функций.

Важным разделом математического программирования является *целочисленное программирование*, когда на переменные накладываются условия целочисленности.

Целью математического программирования является создание, где это возможно, аналитических методов определения решения, а при отсутствии таких методов – создание эффективных вычислительных способов получения приближенного решения.

Наконец, заметим, что наименование предмета – “математическое программирование” – связано с тем, что целью решения задач является выбор программы действий. Рассмотрим более подробно задачу линейного программирования.

Симплекс метод

Решение любой задачи линейного программирования можно найти *симплексным методом*. Прежде чем применять указанный метод, следует записать исходную задачу в форме основной задачи линейного программирования, если она не имеет такой формы записи.

Симплексный метод решения задачи линейного программирования основан на переходе от одного опорного плана к другому, при котором значение целевой функции *возрастает* (при условии, что данная задача имеет оптимальный план и каждый ее опорный план является невырожденным). Указанный переход возможен, если известен какой-нибудь исходный опорный план. Рассмотрим задачу, для которой этот план можно непосредственно записать. Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1, n}\right).$$

Здесь a_{ij}, b_i и $c_j \left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right)$ – заданные постоянные числа $\left(m < n \text{ и } b_i > 0\right)$.

Векторная форма данной задачи имеет следующий вид: найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (22)$$

при условиях

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_mP_m + \ldots + x_nP_n = P_0, \quad (23)$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1, n}\right), \quad (24)$$

где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \ldots; P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}; \ldots; P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Так как

$$b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots + b_mP_m = P_0,$$

то по определению опорного плана $X = (b_1; b_2; \ldots; b_m; 0; \ldots; 0)$ является опорным планом данной задачи (последние $n - m$ компонент вектора X равны нулю). Этот план определяется системой единичных векторов $P_1, P_2, \ldots, P_m,$ которые образуют базис m-мерного пространства. Поэтому каждый из векторов $P_1, P_2, \ldots, P_m,$ а также вектор P_0 могут быть представлены в виде линейной комбинации векторов данного базиса. Пусть

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i \ (j = \overline{0, n}).$$

Положим $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} \ (j = \overline{1, n}); \Delta_j = z_j - c_j \ (j = \overline{1, n}).$ Так как векторы $P_1, P_2, \ldots, P_m$ – единичные, то $x_{ij} = a_{ij}$ и $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij},$ а

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j.$$

Теорема 5

(признак оптимальности опорного плана). *Опорный план* $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots; x_m^*; 0; 0; \ldots; 0)$ *задачи* (22) – (24) *является оптимальным, если* $\Delta_j \geq 0$ *для любого j* F m

Теорема 6.

Если $\Delta_k < 0$ *для некоторого j=k и среди чисел* $a_{ik} \ (i = \overline{1, m})$ *нет положительных* $(a_{ik} \leq 0)$, *то целевая функция* (22) *задачи* (22) – (24) *не ограничена на множестве ее планов.*

Теорема 7.

Если опорный план X задачи (22) – (24) *невырожден и* $\Delta_k < 0$, *но среди чисел* a_{ik} *есть положительные (не все* $a_{ik} \leq 0$ *), то существует опорный план X' такой, что* $F(X') > F(X)$.

Сформулированные теоремы позволяют проверить, является ли найденный опорный план оптимальным, и выявить целесообразность перехода к новому опорному плану.

Исследование опорного плана на оптимальность, а также дальнейший вычислительный процесс удобнее вести, если условия задачи и первоначальные данные, полученные после определения исходного опорного плана, записать так, как показано в табл. 3.

В столбце C_6 этой таблицы записывают коэффициенты при неизвестных целевой функции, имеющие те же индексы, что и векторы данного базиса.

В столбце P_0 записывают положительные компоненты исходного опорного плана, в нем же в результате вычислений получают положительные компоненты оптимального плана. Столбцы векторов P_j представляют собой коэффициенты разложения этих векторов по векторам данного базиса.

В табл. 3 первые m строк определяются исходными данными задачи, а показатели (m+1)-й строки вычисляют. В этой строке в столбце вектора P_0 записывают значение целевой

функции, которое она принимает при данном опорном плане, а в столбце вектора P_j – значение $\Delta_j = z_j - c_j$.

Значение Z_j находится как скалярное произведение вектора $P_j \left(j = \overline{1, m}\right)$ на вектор $C_б = (c_1; c_2; \ldots; c_m)$:

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \left(j = \overline{1, n}\right).$$

Значение F_0 равно скалярному произведению вектора P_0 на вектор $C_б$:

$$F_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i.$$

После заполнения таблицы 3 исходный опорный план проверяют на оптимальность. Для этого просматривают элементы $(m+1)$-й строки таблицы. В результате может иметь место один из следующих трех случаев:

1) $\Delta_j \geq 0$ для j=m+1, $m+2, \ldots, n$ (при $j = \overline{1, m}$ $z_j = c_j$). Поэтому в данном случае числа $\Delta_j \geq 0$ для всех *j* от 1 до *n*;

2) $\Delta_j < 0$ для некоторого *j*, и все соответствующие этому индексу величины $a_{ij} \leq 0 \left(i = \overline{1, m}\right)$;

3) $\Delta_j < 0$ для некоторых индексов *j*, и для каждого такого *j* , по крайней мере, одно из чисел a_{ij} положительно.

В первом случае на основании признака оптимальности исходный опорный план является оптимальным. Во втором случае целевая функция не ограничена сверху на множестве планов, а в третьем случае можно перейти от исходного плана к новому опорному плану, при котором значение целевой функции увеличится. Этот переход от одного опорного плана к другому осуществляется исключением из исходного базиса какого-нибудь из векторов и введением в него нового вектора. В качестве вектора, вводимого в базис, можно взять любой из векторов P_j имеющий индекс *j*, для которого $\Delta_j < 0$. Пусть, например, $\Delta_k < 0$ и решено ввести в базис вектор P_k.

Для определения вектора, подлежащего исключению из базиса, находят $\min \frac{b_i}{a_{ik}}$ для всех $a_{ik} > 0$. Пусть этот минимум достигается при *i*=*r*. Тогда из базиса исключают вектор P_r, а число a_{rk} называют *разрешающим элементом.*

Столбец и строку, на пересечении которых находится разрешающий элемент, называют *направляющими.*

После выделения направляющей строки и направляющего столбца находят новый опорный план и коэффициенты разложения векторов P_j через векторы нового базиса, соответствующего новому опорному плану. Это легко реализовать, если воспользоваться методом Жордана–Гаусса. При этом можно показать, что положительные компоненты нового опорного плана вычисляются по формулам

$$b_i' = \begin{cases} b_i - \left(\frac{b_r}{a_{rk}}\right) a_{ik} & \text{при } i \neq r, \\ \frac{b_r}{a_{rk}} & \text{при } i = r, \end{cases} \qquad (25)$$

а коэффициенты разложения векторов P_j через векторы нового базиса, соответствующего новому опорному плану, – по формулам

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - \left(\dfrac{a_{rj}}{a_{rk}}\right) a_{ik} & \text{при } i \neq r, \\ \dfrac{a_{rj}}{a_{rk}} & \text{при } i = r. \end{cases} \quad (26)$$

После вычисления b'_i и a'_{ij} согласно формулам (25) и (26) их значения заносят в табл. 4. Элементы $(m+1)$-й строки этой таблицы могут быть вычислены либо по формулам

$$F'_0 = F_0 - \left(\frac{b_r}{a_{rk}}\right)\Delta_k, \quad (27)$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - \left(\frac{a_{rj}}{a_{rk}}\right)\Delta_k, \quad (28)$$

либо на основании их определения.

Таблица 3

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	...	c_r	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n
				P_1	P_2	...	P_r	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	...	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	...	0	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	P_r	c_r	b_r	0	0	...	1	...	0	a_{rm+1}	...	a_{rk}	...	a_{rn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	P_m	c_m	b_m	0	0	...	0	...	1	a_{mm+1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}
$m+1$			F_m	0	0	...	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_k	...	Δ_n

Таблица 4

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	...	c_r	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n
				P_1	P_2	...	P_r	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
1	P_1	c_1	b'_1	1	0	...	a'_{1r}	...	0	a'_{1m+1}	...	0	...	a'_{1n}
2	P_2	c_2	b'_2	0	1	...	a'_{2r}	...	0	a'_{2m+1}	...	0	...	a'_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	P_r	c_r	b'_r	0	0	...	a'_{rr}	...	0	a'_{rm+1}	...	1	...	a'_{rn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	P_m	c_m	b'_m	0	0	...	a'_{mr}	...	1	a'_{mm+1}	...	0	...	a'_{mn}
$m+1$			F_m	0	0	...	$z'_r - c_r$	...	0	$z'_{m+1} - c_{m+1}$	...	0	...	$z'_n - c_n$

Наличие двух способов нахождения элементов $(m+1)$-й строки позволяет осуществлять контроль правильности проводимых вычислений.

Из формулы (27) следует, что при переходе от одного опорного плана к другому наиболее целесообразно ввести в базис вектор P_j, имеющий индекс *j*, при котором максимальным по абсолютной величине является число $\left(\dfrac{b_r}{a_{rj}}\right)\Delta_j \; (\Delta_j < 0, a_{rj} > 0)$. Однако с целью упрощения вычислительного процесса в дальнейшем будем вектор, вводимый в базис, определять, исходя из максимальной абсолютной величины отрицательных чисел Δ_j. Если же таких чисел несколько, то в базис будем вводить вектор, имеющий такой же индекс, как и максимальное из чисел c_j, определяемых данными числами $\Delta_j \; (\Delta_j < 0)$.

Итак, переход от одного опорного плана к другому сводится к переходу от одной симплекс-таблицы к другой. Элементы новой симплекс-таблицы можно вычислить как с помощью рекуррентных формул (25)-(28), так и по правилам, непосредственно вытекающим из них. Эти правила состоят в следующем.

В столбцах векторов, входящих в базис, на пересечении строк и столбцов одноименных векторов проставляются единицы, а все остальные элементы данных столбцов полагают равными нулю.

Элементы векторов P_0 и P_j в строке новой симплекс-таблицы, в которой записан вектор, вводимый в базис, получают из элементов этой же строки исходной таблицы делением их на величину разрешающего элемента. В столбце C_B в строке вводимого вектора проставляют величину c_k, где k – индекс вводимого вектора.

Остальные элементы столбцов вектора P_0 и P_j новой симплекс-таблицы вычисляют по правилу треугольника. Для вычисления какого-нибудь из этих элементов находят три числа:

1) число, стоящее в исходной симплекс-таблице на месте искомого элемента новой симплекс-таблицы;

2) число, стоящее в исходной симплекс-таблице на пересечении строки, в которой находится искомый элемент новой симплекс-таблицы, и столбца, соответствующего вектору, вводимому в базис;

3) число, стоящее в новой симплекс-таблице на пересечении столбца, в котором стоит искомый элемент, и строки вновь вводимого в базис вектора (как отмечено выше, эта строка получается из строки исходной симплекс-таблицы делением ее элементов на разрешающий элемент).

Эти три числа образуют своеобразный треугольник, две вершины которого соответствуют числам, находящимся в исходной симплекс-таблице, а третья – числу, находящемуся в новой симплекс-таблице. Для определения искомого элемента новой симплекс-таблицы из первого числа вычитают произведение второго и третьего.

После заполнения новой симплекс-таблицы просматривают элементы $(m+1)$ -й строки. Если все $z_j' - c_j \geq 0$, то новый опорный план является оптимальным. Если же среди указанных чисел имеются отрицательные, то, используя описанную выше последовательность действий, находят новый опорный план. Этот процесс продолжают до тех пор, пока либо не получают оптимальный план задачи, либо не устанавливают ее неразрешимость.

При нахождении решения задачи линейного программирования мы предполагали, что эта задача имеет опорные планы и каждый такой план является невырожденным. Если же задача имеет вырожденные опорные планы, то на одной из итераций одна или несколько переменных опорного плана могут оказаться равными нулю. Таким образом, при переходе от одного опорного плана к другому значение функции может остаться прежним. Более того, возможен случай, когда функция сохраняет свое значение в течение нескольких итераций, а также возможен возврат к первоначальному базису. В последнем случае обычно говорят, что произошло *зацикливание.* Однако при решении практических задач этот случай встречается очень редко, поэтому мы на нем останавливаться не будем.

Итак, нахождение оптимального плана симплексным методом включает следующие этапы:

1. Находят опорный план.
2. Составляют симплекс-таблицу.
3. Выясняют, имеется ли хотя бы одно отрицательное число Δ_j. Если нет, то найденный опорный план оптимален. Если же среди чисел Δ_j имеются отрицательные, то либо устанавливают неразрешимость задачи, либо переходят к новому опорному плану.
4. Находят направляющие столбец и строку. Направляющий столбец определяется наибольшим по абсолютной величине отрицательным числом Δ_j, а направляющая строка

– минимальным из отношений компонент столбца вектора P_0 к положительным компонентам направляющего столбца.

5. По формулам (25) – (28) определяют положительные компоненты нового опорного плана, коэффициенты разложения векторов *Pj* по векторам нового базиса и числа F_0', Δ_j'. Все эти числа записываются в новой симплекс-таблице.

6. Проверяют найденный опорный план на оптимальность. Если план неоптимален и необходимо перейти к новому опорному плану, то возвращаются к этапу 4, а в случае получения оптимального плана или установления неразрешимости процесс решения задачи заканчивают.

Пример 9.

Для изготовления различных изделий *A*, *B* и С предприятие использует три различных вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия *A*, *B* и *C*, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в табл. 5.

Таблица 5

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	*B*	*C*	
I II III	18 6 5	15 4 3	12 8 3	360 192 180
Цена одного изделия (руб.)	9	10	16	

Изделия *A*, *B* и *C* могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида.

Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи. Искомый выпуск изделий *A* обозначим через x_1, изделий *B* – через x_2, изделий *C* – через x_3. Поскольку имеются ограничения на выделенный предприятию фонд сырья каждого вида, переменные x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180. \end{cases} \quad (29)$$

Общая стоимость произведенной предприятием продукции при условии выпуска x_1 изделий *A*, x_2 изделий *B* и x_3 изделий *C* составляет

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3. \quad (30)$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1, x_2, x_3 могут принимать только лишь неотрицательные значения:

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0. \quad (31)$$

Таким образом, приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений системы неравенств (29) требуется найти такое, при котором функция (30) принимает максимальное значение.

Запишем эту задачу в форме основной задачи линейного программирования. Для этого перейдем от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Введем три дополнительные переменные, в результате чего ограничения запишутся в виде системы уравнений

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180. \end{cases}$$

Эти дополнительные переменные по экономическому смыслу означают не используемое при данном плане производства количество сырья того или иного вида. Например, x_4 – это неиспользуемое количество сырья I вида.

Преобразованную систему уравнений запишем в векторной форме:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}; P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; P_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

Поскольку среди векторов $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ имеются три единичных вектора, для данной задачи можно непосредственно записать опорный план. Таковым является план *X*=(0; 0; 0; 360; 192; 180), определяемый системой трехмерных единичных векторов P_4, P_5, P_6 которые образуют базис трехмерного векторного пространства.

Составляем симплексную таблицу для I итерации (табл. 6), подсчитываем значения $F_0, z_j - c_j$ и проверяем исходный опорный план на оптимальность:

$$F_0 = (C, P_0) = 0; z_1 = (C, P_1) = 0; z_2 = (C, P_2) = 0; z_3 = (C, P_3) = 0;$$

$$z_1 - c_1 = 0 - 9 = -9; z_2 - c_2 = 0 - 10 = -10; z_3 - c_3 = -16.$$

Для векторов базиса $z_j - c_j = 0$.

Таблица 6

i	Базис	*Cб*	*P0*	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	p_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	p_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	p_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0

Как видно из таблицы 6, значения всех основных переменных x_1, x_2, x_3 равны нулю, а дополнительные переменные принимают свои значения в соответствии с ограничениями задачи. Эти значения переменных отвечают такому “плану”, при котором ничего не производится, сырье не используется и значение целевой функции равно нулю (т. е. стоимость произведенной продукции отсутствует). Этот план, конечно, не является оптимальным.

Это видно и из 4-й строки табл. 6, так как в ней имеется три отрицательных числа: $z_1 - c_1 = -9, z_2 - c_2 = -10$ и $z_3 - c_3 = -16$. Отрицательные числа не только свидетельствуют о возможности увеличения общей стоимости производимой продукции, но и показывают, на сколько увеличится эта сумма при введении в план единицы того или другого вида продукции.

Так, число – 9 означает, что при включении в план производства одного изделия *A* обеспечивается увеличение выпуска продукции на 9 руб. Если включить в план производства по одному изделию *B* и С, то общая стоимость изготовляемой продукции возрастет соответственно на 10 и 16 руб. Поэтому с экономической точки зрения наиболее целесообразным является включение в план производства изделий *C.* Это же необходимо сделать и на основании формального признака симплексного метода, поскольку максимальное по абсолютной величине отрицательное число Δ_j стоит в 4-й строке столбца вектора P_3. Следовательно, в базис введем вектор P_3. определяем вектор, подлежащий

исключению из базиса. Для этого находим $\Theta_0 = \min\left(\frac{b_i}{a_{i3}}\right)$ для $a_{i3} > 0$, т. е. $\Theta_0 = \min\left(\frac{360}{12}; \frac{192}{8}; \frac{180}{3}\right) = \frac{192}{8}$.

Найдя число $\frac{192}{8} = 24$, мы тем самым с экономической точки зрения определили, какое количество изделий *C* предприятие может изготовлять с учетом норм расхода и имеющихся объемов сырья каждого вида. Так как сырья данного вида соответственно имеется 360, 192 и 180 кг, а на одно изделие *C* требуется затратить сырья каждого вида соответственно 12, 8 и 3 кг, то максимальное число изделий *C*, которое может быть изготовлено предприятием, равно $\min\left(\frac{360}{12}; \frac{192}{8}; \frac{180}{3}\right) = \frac{192}{8} = 24$, т. е. ограничивающим фактором для производства изделий *C* является имеющийся объем сырья II вида. С учетом его наличия предприятие может изготовить 24 изделия *C*. При этом сырье II вида будет полностью использовано.

Следовательно, вектор P_5 подлежит исключению из базиса. Столбец вектора P_3 к 2-я строка являются направляющими. Составляем таблицу для II итерации (табл. 7).

Таблица 7

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	p_4	p_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	p_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	p_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Сначала заполняем строку вектора, вновь введенного в базис, т. е. строку, номер которой совпадает с номером направляющей строки. Здесь направляющей является 2-я строка. Элементы этой строки табл. 7 получаются из соответствующих элементов таблицы 6 делением их на разрешающий элемент (т. е. на 8). При этом в столбце $C_б$ записываем коэффициент $B_0 B$, стоящий в столбце вводимого в базис вектора P_3. Затем заполняем элементы столбцов для векторов, входящих в новый базис. В этих столбцах на пересечении строк и столбцов одноименных векторов проставляем единицы, а все остальные элементы полагаем равными нулю.

Для определения остальных элементов табл. 7 применяем правило треугольника. Эти элементы могут быть вычислены и непосредственно по рекуррентным формулам.

Вычислим элементы табл. 7, стоящие в столбце вектора P_0. Первый из них находится в 1-й строке этого столбца. Для его вычисления находим три числа:

1) число, стоящее в табл. 6 на пересечении столбца вектора P_0 и 1-й строки (360);

2) число, стоящее в табл. 6 на пересечении столбца вектора P_3 и 1-й строки (12);

3) число, стоящее в табл. 7 на пересечении столбца вектора P_0 и 2-й строки (24).

Вычитая из первого числа произведение двух других, находим искомый элемент: 360 – 12 х 24=72; записываем его в 1-й строке столбца вектора P_0 табл. 7.

Второй элемент столбца вектора P_0 табл. 7 был уже вычислен ранее. Для вычисления третьего элемента столбца вектора P_0 также находим три числа. Первое из них (180) находится на пересечении 3-й строки и столбца вектора P_0 табл. 6, второе (3) – на пересечении 3-й строки и столбца вектора P_3 табл. 6, третье (24) – на пересечении 2-й строки и столбца вектора P_0 табл. 8. Итак, указанный элемент есть 180 – 24 х 3=108. Число 108 записываем в 3-й строке столбца вектора P_0 табл. 7.

Значение F_0 в 4-й строке столбца этого же вектора можно найти двумя способами:

1) по формуле $F_0 = (C, P_0)$, т.е. $F_0 = 0 \cdot 72 + 16 \cdot 24 + 0 \cdot 108 = 384$;

2) по правилу треугольника; в данном случае треугольник образован числами 0, -16, 24. Этот способ приводит к тому же результату: 0 - (-16) х 24=384.

При определении по правилу треугольника элементов столбца вектора P_0 третье число, стоящее в нижней вершине треугольника, все время оставалось неизменным и менялись лишь первые два числа. Учтем это при нахождении элементов столбца вектора P_1 табл. 7. Для вычисления указанных элементов первые два числа берем из столбцов векторов P_1 и P_3 табл. 6, а третье число – из табл. 7. Это число стоит на пересечении 2-й строки и столбца вектора P_1 последней таблицы. В результате получаем значения искомых элементов: 18 – 12 x (3/4) =9; 5 – 3 x (3/4) = 11/4.

Число $z_1 - c_1$ в 4-й строке столбца вектора P_1 табл. 7 можно найти двумя способами:

1) по формуле Z_1-C_1=(C,P_1)-C_1 имеем $0 \cdot 9 + 16 \cdot 3/4 + 0 \cdot 11/4 - 9 = 3;$

2) по правилу треугольника получим $-9 - (-16) \cdot (3/4) = 3.$

Аналогично находим элементы столбца вектора P_2.

Элементы столбца вектора P_5 вычисляем по правилу треугольника. Однако построенные для определения этих элементов треугольники выглядят иначе.

При вычислении элемента 1-й строки указанного столбца получается треугольник, образованный числами 0,12 и 1/8. Следовательно, искомый элемент равен 0 – 12 x (1/8) = -3/2. Элемент, стоящий в 3-й строке данного столбца, равен 0 - 3 x (1 /8) = -3/8.

По окончании расчета всех элементов табл. 7 в ней получены новый опорный план и коэффициенты разложения векторов $P\left(j = \overline{1, 6}\right)$ через базисные векторы P_4, P_3, P_6 и значения Δ'_j и F'_0. Как видно из этой таблицы, новым опорным планом задачи является план X=(0; 0; 24; 72; 0; 108). При данном плане производства изготовляется 24 изделия C и остается неиспользованным 72 кг сырья 1 вида и 108 кг сырья III вида. Стоимость всей производимой при этом плане продукции равна 384 руб. Указанные числа записаны в столбце вектора P_0 табл. 7. Как видно, данные этого столбца по-прежнему представляют собой параметры рассматриваемой задачи, хотя они претерпели значительные изменения. Изменились данные и других столбцов, а их экономическое содержание стало более сложным. Так, например, возьмем данные столбца вектора P_2. Число 1/2 во 2-й строке этого столбца показывает, на сколько следует уменьшить изготовление изделий C, если запланировать выпуск одного изделия B. Числа 9 и 3/2 в 1-й и 3-й строках вектора P_2 показывают соответственно, сколько потребуется сырья I и II вида при включении в план производства одного изделия B, а число – 2 в 4-й строке показывает, что если будет запланирован выпуск одного изделия B, то это обеспечит увеличение выпуска продукции в стоимостном выражении на 2 руб. Иными словами, если включить в план производства продукции одно изделие B, то это потребует уменьшения выпуска изделия C на 1/2 ед. и потребует дополнительных затрат 9 кг сырья I вида и 3/2 кг сырья III вида, а общая стоимость изготовляемой продукции в соответствии с новым оптимальным планом возрастет на 2 руб. Таким образом, числа 9 и 3/2 выступают как бы новыми “нормами” затрат сырья I и III вида на изготовление одного изделия B (как видно из табл. 6, ранее они были равны 15 и 3), что объясняется уменьшением выпуска изделий C.

Такой же экономический смысл имеют и данные столбца вектора P_1 табл. 7. Несколько иное экономическое содержание имеют числа, записанные в столбце вектора P_5. Число 1/8 во 2-й строке этого столбца, показывает, что увеличение объемов сырья II вида на 1 кг позволило бы увеличить выпуск изделий C на 1/8 ед. Одновременно потребовалось бы дополнительно 3/2 кг сырья I вида и 3/8 кг сырья III вида. Увеличение выпуска изделий C на 1/8 ед. приведет к росту выпуска продукции на 2 руб.

Из изложенного выше экономического содержания данных табл. 7 следует, что найденный на II итерации план задачи не является оптимальным. Это видно и из 4-й строки табл. 7, поскольку в столбце вектора P_2 этой строки стоит отрицательное число – 2. Значит, в базис следует ввести вектор P_2, т. е. в новом плане следует предусмотреть выпуск изделий B. При определении возможного числа изготовления изделий B следует учитывать имеющееся

количество сырья каждого вида, а именно: возможный выпуск изделий *B* определяется $\min\left(\frac{b_i'}{a_{i2}'}\right)$ для $a_{i2}' > 0$, т. е. находим

$$\Theta_0 = \min\left(\frac{72}{9}; \frac{24 \cdot 2}{1}; \frac{108 \cdot 2}{3}\right) = \frac{72}{9} = 8.$$

Следовательно, исключению из базиса подлежит вектор P_4 иными словами, выпуск изделий *B* ограничен имеющимся в распоряжении предприятия сырьем I вида. С учетом имеющихся объемов этого сырья предприятию следует изготовить 8 изделий *B*. Число 9 является разрешающим элементом, а столбец вектора P_2 и 1-я строка табл. 7 являются направляющими. Составляем таблицу для III итерации (табл. 8).

Таблица 8

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	p_4	p_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

В табл. 8 сначала заполняем элементы 1-й строки, которая представляет собой строку вновь вводимого в базис вектора P_2. Элементы этой строки получаем из элементов 1-й строки табл. 7 делением последних на разрешающий элемент (т.е. на 9). При этом в столбце $C_б$ данной строки записываем $C_2 = 10$.

Затем заполняем элементы столбцов векторов базиса и по правилу треугольника вычисляем элементы остальных столбцов. В результате в табл. 8 получаем новый опорный план *X*=(0; 8; 20; 0; 0; 96) и коэффициенты разложения векторов $P_j \left(j = \overline{1,6}\right)$ через базисные векторы $\left(j = \overline{1,n}\right)$ и соответствующие значения Δ_j' и F_0''.

Проверяем, является ли данный опорный план оптимальным или нет. Для этого рассмотрим 4-ю строку, табл. 8. В этой строке среди чисел Δ_j' нет отрицательных. Это означает, что найденный опорный план является оптимальным и $F_{max} = 400$.

Следовательно, план выпуска продукции, включающий изготовление 8 изделий *B* и 20 изделий *C*, является оптимальным. При данном плане выпуска изделий полностью используется сырье I и II видов и остается неиспользованным 96 кг сырья III вида, а стоимость производимой продукции равна 400 руб.

Оптимальным планом производства продукции не предусматривается изготовление изделий *A*. Введение в план выпуска продукции изделий вида *A* привело бы к уменьшению указанной общей стоимости. Это видно из 4-й строки столбца вектора P_1, где число 5 показывает, что при данном плане включение в него выпуска единицы изделия *A* приводит лишь к уменьшению общей величины стоимости на 5 руб.

Решение данного примера симплексным методом можно было бы проводить, используя лишь одну таблицу (табл. 9). В этой таблице последовательно записаны одна за другой все три итерации вычислительного процесса.

Таблица 9

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	p_4	p_5	P_6

1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	p_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	p_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4	P_4	0	0	-9	-10	-16	0	0	0
1	p_3	16	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	p_6	0	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_2	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4	p_3	16	384	3	-2	0	0	2	0
1	p_6	0	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
2			20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
3			96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

Пример 10.

Найти максимум функции $F = 2x_1 - 6x_2 + 5x_5$ при условиях

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20, \\ -x_1 - 2x_1 + x_4 + 3x_5 = 24, \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,6}\right).$$

Решение. Систему уравнений задачи запишем в векторной форме:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

где

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}; P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; P_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Так как среди векторов $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ имеется три единичных вектора, то для данной задачи можно непосредственно найти опорный план. Таковым является план X=(0, 0, 20, 24; 0; 18). Составляем симплексную таблицу (табл. 10) и проверяем, является ли данный опорный план оптимальным.

Таблица 10

i	Базис	$C_б$	P_0	2	-6	0	0	5	0
				P_1	P_2	P_3	p_4	p_5	P_6
1	p_3	0	20 24	-2	1	1	0	1	0
2	P_4	0	18	-1	-2	0	1	3	0
3	p_6	0	0	3	-1	0	0	-12	1
4				-2	6	0	0	-5	0

Как видно из табл. 10, исходный опорный план не является оптимальным. Поэтому переходим к новому опорному плану. Это можно сделать, так как в столбцах векторов P_1 и p_5, 4-я строка которых содержит отрицательные числа, имеются положительные элементы. Для перехода к новому опорному плану введем в базис вектор p_5 и исключим из базиса вектор p_4. Составляем таблицу II итерации.

Таблица 11

i	Базис	$C_б$	P_0	2	-6	0	0	5	0
				P_1	P_2	P_3	p_4	p_5	P_6
1	p_3	0	12	-5/3	5/3	1	-1/3	0	0
2	P_5	5	8	-1/3	-2/3	0	1/3	1	0
3	p_6	0	114	-1	-9	0	4	0	1
			40	-11/3	8/3	0	5/3	0	0

Как видно из табл. 11, новый опорный план задачи не является оптимальным, так как в 4-й строке столбца вектора P_1 стоит отрицательное число -11/3. Поскольку в столбце этого вектора нет положительных элементов, данная задача не имеет оптимального плана.

Пример 1

Предприятие изготавливает и продает краску двух видов: для внутренних и внешних работ. Для производства краски используется два исходных продукта А и В. Расходы продуктов А и В на 1 т. соответствующих красок и запасы этих продуктов на складе приведены в таблице:

Исходный продукт	Расход продуктов (в тоннах на 1 т. краски)		Запас продукта на складе (тонн)
	краска для внутренних работ	краска для внешних работ	
А	1	2	3
В	3	1	3

Продажная цена за 1 тонну краски для внутренних работ составляет 2 000 рублей, краска для наружных работ продается по 1 000 рублей за 1 тонну. Требуется определить какое количество краски каждого вида следует производить предприятию, чтобы получить **максимальный доход.**

Рассмотрим поэтапное решение этой задачи симплекс- методом, который состоит из этапов: 1. Составление математической модели задачи.2. Приведение задачи к стандартному виду, т. е. выражение целевой функции и базисных переменных через свободные переменные. 3.Составление первой симплекс-таблицы. 4. Максимальное увеличение свободных переменных, входящих в целевую функцию со знаком «+» ,не выходя за пределы ОДР.

I. Составление математической модели задачи.

1) Переменные задачи.

Обозначим: $\mathbf{x_1}$ - количество производимой краски для внутренних работ;

$\mathbf{x_2}$ - соответствующее количество краски для наружных работ.

2) Ограничения, которым должны удовлетворять переменные задачи:

$x_1 , x_2 \geq 0$;

по расходу продукта А: $x_1 + 2x_2 \leq 3$;

по расходу продукта В: $3x_1 + x_2 \leq 3$;

В левых частях последних двух неравенств определены расходы продуктов А и В, а в правых частях неравенств записаны запасы этих продуктов.

3) Целевая функция задачи.

Обозначим Z доход от продажи краски (в тысячах рублей), тогда целевая функция задачи записывается так:

$Z = 2x_1 + x_2$,

таким образом, задача состоит в том, чтобы найти max $Z=2x_1+x_2$, при ограничениях:

$x_1 + 2x_2 \leq 3$ (А)

$3x_1 + x_2 \leq 3$ (В)

$x_1 , x_2 \geq 0$.

Так как переменные задачи x_1 и x_2 входят в целевую функцию и ограничения задачи линейно, то соответствующая задача оптимизации называется задачей линейного программирования (ЛП).

2 Приведение задачи к стандартному виду.

Вводя вспомогательные (балансовые) переменные x_3 и x_4 в левые части неравенств (А) и (В), запишем ограничения в виде уравнений:

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$ (А)

$3x_1 + x_2 + x_4 = 3$ (В)

Целевая функция $Z = 2x_1 + x_2$ при приведении задачи к стандартному виду записывается так:

$Z - 2x_1 - x_2 = 0$ (С)

2) Составление первой симплекс-таблицы.

Симплекс-таблица составляется из коэффициентов при x_1, x_2, x_3, x_4 и чисел, стоящих в правых частях уравнений-ограничений задачи: в первой строке записываются элементы уравнения (А), во второй - (В). В последней строке симплекс-таблицы записываются коэффициенты и правая часть целевой функции (С). Таким образом, симплекс-таблица содержит две строки коэффициентов (по числу ограничений задачи) и строку коэффициентов целевой функции. Число столбцов в симплекс-таблице равно числу переменных задачи плюс один столбец правых частей (b):

X_1	X_2	X_3	X_4	b
1	2	1	0	3
3	1	0	1	3
-2	-1	0	0	0

Переменные, для которых столбцы коэффициентов состоят из одной единицы и нулей, называются базисными (В приведенном примере x_3 и x_4 - базисные переменные). Число базисных переменных равно числу ограничений задачи и не меняется при симплекс-преобразовании. Остальные переменные называются свободными (x_1 и x_2).

Симплекс-таблица определяет частное решение системы уравнений-ограничений :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \text{ (A)} \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 3 \text{ (A)} \end{cases}$$

при котором свободные переменные равны нулю (x_1=0, x_2=0), а базисные переменные равны правым частям соответствующих строк (x_3=3, x_4=3).

Значение целевой функции Z всегда равно числу, стоящему в правом нижнем углу таблицы (Z=2*0+1*0=0). Первая симплекс-таблица соответствует начальному решению задачи ЛП (x_1=0, x_2=0, x_3=3, x_4=3, Z=0). Это решение соответствует вершине А многоугольника допустимых решений ABCD на рис.3.

4.Симплекс-метод состоит в последовательном перемещении по вершинам многоугольника допустимых решений. Каждой вершине соответствует своя симплекс-таблица, которая получается из предыдущей при помощи симплекс-преобразования.

В качестве разрешающего столбца берут столбец, у которого коэффициент в строке целевой функции является отрицательным и наибольшим по модулю. Если в данной симплекс-таблице строка целевой функции не содержат отрицательных коэффициентов, то решение задачи ЛП закончено и симплекс-таблица определяет решение задачи, при котором целевая функция Z принимает максимальное значение.

Разрешающая строка определяется по отношениям коэффициентов столбца b к соответствующим коэффициентам разрешающего столбца. Разрешающей будет строка, для которой это отношение минимально. При, этом для нулевых и отрицательных коэффициентов разрешающего столбца отношения не вычисляются.

Для первой симплекс-таблицы разрешающим столбцом является первый столбец (свободная переменная x_1 будет преобразована в базисную). Среди отношений коэффициентов столбца b к коэффициентам разрешающего столбца: 3/1 и 3/3 минимальным будет отношение 3/3: разрешающей строкой будет вторая строка (базисная переменная x_4 будет преобразована в свободную).

X_1	X_2	X_3	X_4	b
1	2	1	0	3
3	1	0	1	3
-2	-1	0	0	0

На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находится <u>разрешающий элемент</u>.

Задача симплекс преобразования состоит в том, чтобы на месте разрешающего элемента получить единицу, а все остальные элементы разрешающего столбца сделать нулевыми. При этом допускается выполнение только двух операций со строками симплекс таблицы:

а) разрешающую строку можно делить (умножать) на любое число;

б) из любой строки можно вычитать элементы разрешающей строки или к любой строке можно прибавлять элементы разрешающей строки.

Выполним преобразование первой симплекс-таблицы.

1) Делим элементы разрешающей строки на 3:

X_1	X_2	X_3	X_4	b
1	2	1	0	3
1	1/3	0	1/3	1
-2	-1	0	0	0

2) Из элементов первый строки вычитаем элементы второй (разрешающей) строки:

X_1	X_2	X_3	X_4	b
0	5/3	1	-1/3	2
1	1/3	0	1/3	1
-2	-1	0	0	0

3. К элементам третьей строки прибавляем элементы разрешающей строки, предварительно умножив их на два:

X_1	X_2	X_3	X_4	b
0	5/3	1	-1/3	2
1	1/3	0	1/3	1
0	-1/3	0	2/3	2

Преобразование закончено. Полученной симплекс-таблице соответствует следующее решение:

базисные переменные: $x_1=1$, $x_3=2$

свободные переменные: $x_2=0$, $x_4=0$.

Точка с координатами $x_1=1$, $x_2=0$ – это вершина D (см. рис.3). Значение целевой функции Z(D)=2.

Так как в строке коэффициентов целевой функции есть отрицательный коэффициент (-1/3 во втором столбце), то преобразование продолжается. Второй столбец является разрешающим (свободная переменная x_2 переводится в базисную), минимальным среди

отношений: $\frac{2}{5/3} = \frac{6}{5}$ и $\frac{1}{1/3} = 3$ является первое число, следовательно разрешающей строкой является первая строка (базисная переменная x_3 переводится в свободную).

X_1	X_2	X_3	X_4	b
0 →	5/3	1	-1/3	2
1	1/3	0	1/3	1
0	-1/3	0	2/3	2

↑

Выполнив симплекс-преобразование, получим:

X_1	X_2	X_3	X_4	b
0	1	3/5	-1/5	6/5
1	0	0	1/3	3/5
0	0	1/5	3/5	12/5

Так как в строке коэффициентов целевой функции нет отрицательных, решение задачи закончено.

Оптимальное решение таково:

базисные переменные: x_1*=3/5=0.6; x_2*=6/5=1.2;

свободные переменные: x_3*=0; x_4*=0.

Точка с координатами x_1*=0.6 и x_2*=1.2 это вершина C (см. рис.3)

Максимальное значение дохода (целевой функции):

Z*(C) = 12/5 = 2.4

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Теоретическое введение

Задача о размещении (транспортная задача) – это РЗ, в которой работы и ресурсы измеряются в одних и тех же единицах. В таких задачах ресурсы могут быть разделены между работами, и отдельные работы могут быть выполнены с помощью различных комбинаций ресурсов. Примером типичной транспортной задачи (ТЗ) является распределение (транспортировка) продукции, находящейся на складах, по предприятиям-потребителям.

Стандартная ТЗ определяется как задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции *одного вида* из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку *единицы продукции*.

Исходные параметры модели ТЗ

1) n – количество пунктов отправления, m – количество пунктов назначения.
2) a_i – запас продукции в пункте отправления A_i ($i=\overline{1,n}$) [ед. прод.].
3) b_j – спрос на продукцию в пункте назначения B_j ($j=\overline{1,m}$) [ед. прод.].
4) c_{ij} – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [руб./ед. прод.].

Искомые параметры модели ТЗ

1) x_{ij} – количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [ед. прод.].
2) $L(X)$ – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].

Этапы построения модели

I. Определение переменных.
II. Проверка сбалансированности задачи.
III. Построение сбалансированной транспортной матрицы.
IV. Задание ЦФ.
V. Задание ограничений.

Транспортная модель

$$L(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}\to\min;$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=a_i,\ i=\overline{1,n},\\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j,\ j=\overline{1,m},\\ \forall x_{ij}\ge 0\ \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}\right).\end{cases}\qquad(1)$$

ЦФ представляет собой общие транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом. Первая группа ограничений указывает, что запас продукции в любом пункте отправления должен быть равен суммарному объему перевозок продукции из этого пункта. Вторая группа ограничений указывает, что суммарные перевозки продукции в

некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворить спрос на продукцию в этом пункте. Наглядной формой представления модели ТЗ является транспортная матрица (табл.1).

Таблица 1

Общий вид транспортной матрицы

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, ед. прод.
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}, [руб./ед. прод.]	c_{12}	…	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	a_n
Потребность ед. прод.	b_1	b_2	…	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Из модели (4.1) следует, что сумма запасов продукции во всех пунктах отправления должна равняться суммарной потребности во всех пунктах потребления, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \quad (2)$$

Если (4.2) выполняется, то ТЗ называется **сбалансированной** (закрытой), в противном случае – **несбалансированной** (открытой). В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный **фиктивный** (реально не существующий) пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, т.е.

$$b_{ф} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j .$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный **фиктивный** пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$a_{ф} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Для фиктивных перевозок вводятся **фиктивные** тарифы $c^{ф}$, величина которых обычно приравнивается к нулю $c^{ф} = 0$. Но в некоторых ситуациях величину фиктивного тарифа можно интерпретировать как **штраф**, которым облагается каждая единица недопоставленной продукции. В этом случае величина $c^{ф}$ может быть любым положительным числом.

Задача о назначениях – частный случай ТЗ. В задаче о назначениях количество пунктов отправления равно количеству пунктов назначения. Объемы потребности и предложения в каждом из пунктов назначения и отправления равны 1. Примером типичной задачи о назначениях является распределение работников по различным видам работ, минимизирующее суммарное время выполнения работ.

Переменные задачи о назначениях определяются следующим образом

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i-\text{й рабочий работает на } j-\text{м станке,} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

- **Стандартная транспортная задача**

Задача

Заводы некоторой автомобильной фирмы расположены в городах A, B и C. Основные центры распределения продукции сосредоточены в городах D и E. Объемы производства указанных трех заводов равняются 1000, 1300 и 1200 автомобилей ежеквартально. Величины квартального спроса в центрах распределения составляют 2300 и 1400 автомобилей соответственно. Стоимости перевозки автомобилей по железной дороге по каждому из возможных маршрутов приведены в табл.2.

Таблица 2

Стоимость перевозки автомобилей, руб./шт.

	D	E
A	80	215
B	100	108
C	102	68

Постройте математическую модель, позволяющую определить количество автомобилей, перевозимых из каждого завода в каждый центр распределения, таким образом, чтобы общие транспортные расходы были минимальны.

Решение

Определение переменных

Обозначим количество автомобилей, перевозимых из i-го завода в j-й пункт потребления через x_{ij}.

Проверка сбалансированности задачи

Проверим равенство суммарного производства автомобилей и суммарного спроса

$$\underbrace{(1000+1300+1200)}_{3500\text{ шт./кв.}} < \underbrace{(2300+1400)}_{3700\text{ шт./кв.}},$$

откуда следует вывод – задача *несбалансирована*, поскольку спрос на автомобили превышает объем их производства. Для установления баланса введем дополнительный *фиктивный* завод с ежеквартальным объемом производства 200 шт. ($3700 - 3500 = 200$). Фиктивные тарифы $c^{ф}$ приравняем к нулю (т.к. перевозки в действительности производиться не будут).

Построение транспортной матрицы

Согласно результатам проверки сбалансированности задачи в транспортной матрице должно быть четыре строки, соответствующих заводам и два столбца, соответствующих центрам распределения (см. табл.3). Тариф перевозки обычно вписывают ***в правом нижнем*** углу клетки матрицы для удобства дальнейшего нахождения опорных планов задачи.

Таблица 3

Транспортная матрица задачи

	D	E	Объем произв., шт./квартал
A	80	215	1000
B	100	108	1300
C	102	68	1200
Фиктивный завод			200

	0	0	
Спрос, шт./квартал	2300	1400	*3700*

Задание ЦФ

Суммарные затраты в рублях на ежеквартальную перевозку автомобилей определяются по формуле

$$L(X) = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32} + 0 \cdot x_{41} + 0 \cdot x_{42} \to \min$$

Задание ограничений

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 1000, \\ x_{21} + x_{22} = 1300, \\ x_{31} + x_{32} = 1200, \\ x_{41} + x_{42} = 200, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 2300, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1400, \\ x_{ij} \geq 0 \ \left(\forall i = \overline{1,2}; \forall j = \overline{1,4}\right). \end{cases}$$

[шт./квартал]

- **Модификации стандартной транспортной задачи**
- Недопустимые перевозки

Иногда в определенных направлениях перевозки продукции невозможны, например, по причине ремонта транспортных магистралей. Такие ситуации моделируются с помощью введения так называемых **запрещающих** тарифов c^3. Запрещающие тарифы должны сделать невыгодными перевозки в соответствующих направлениях. Для этого величина запрещающих тарифов должна быть больше реальных тарифов в транспортной матрице $c^3 > \max c_{ij} \ \left(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}\right)$.

Максимизация ЦФ

Существующий алгоритм решения транспортных задач (**метод потенциалов**) предполагает, что ЦФ стремится к минимуму. Однако существуют ситуации, когда в рамках транспортной модели требуется максимизировать ЦФ, например, общий доход, объем продаж, прибыль, качество выполняемых работ и т.д. В этом случае в модель вместо искомой ЦФ $L(X)$ вводится ЦФ $L_1(X) = -L(X)$, в которой тарифы умножаются на (-1). Таким образом, максимизация $L(X)$ будет соответствовать минимизации $L_1(X)$.

- Многопродуктовые модели

Если в задаче идет речь о том, что из каждого пункта отправления можно перевозить продукцию нескольких видов, то при построении модели можно использовать один из следующих вариантов:

- каждому виду продукции должна соответствовать одна транспортная матрица;
- все виды продукции представлены в одной общей матрице с использованием запрещающих тарифов в клетках, связывающих разные виды продукции

Статистический анализ

Шкалы измерения

Измерение в терминах производимых операций – это приписывание объекту числа/значения по определенному правилу. Это правило устанавливает соответствие между измеряемым свойством объекта и результатом измерения признака.
Важно, что точность, с которой признак отражает исследуемое свойство, зависит от процедуры измерения.
Традиционно различают четыре типа шкал измерения:

1. Номинативная, или номинальная, или шкала наименований.
2. Порядковая или ординальная шкала.
3. Интервальная или шкала равных интервалов.
4. Шкала равных отношений.

Номинативная шкала (неметрическая) – это шкала, классифицирующая по названию. Название не измеряется количественно. Оно лишь позволяет отличить один объект от другого. Это способ классификации объектов, основанный на распределении их по ячейкам классификации. В ее основе лежит процедура обычно не ассоциируемая с измерением. Пользуясь определенным правилом, объекты группируются по различным классам так, чтобы внутри определенного класса они были идентичны по измеряемому свойству. Каждому классу дается наименование (обычно числовое). Затем каждому объекту присваивается соответствующее обозначение.
Простейший случай номинативной шкалы – дихотомическая шкала, состоящая из двух ячеек. Признак, который измеряют по дихотомической шкале, называют альтернативным.
Расклассифицировав все объекты по ячейкам классификации, мы получаем возможность от наименований перейти к числам, подсчитав количество наблюдений в каждой ячейке.
В случае такой шкалы учитывается только одно свойство чисел – то, что это разные символы. Остальные свойства не учитываются: операции с числами, упорядочивание. При сравнении объектов можно делать вывод о том, принадлежат ли они к одному классу, тождественны или нет по измеренному признаку.
Таким образом, номинативная шкала позволяет нам подсчитывать частоты встречаемости разных наименований, или значений признака, и затем работать с этими частотами математическими методами.
Единица измерений, которой мы при этом оперируем – количество наблюдений или частота. Точнее, единица измерения – это одно наблюдение. Такие данные могут быть обработаны с помощью метода χ^2, биномиального критерия *m* и углового преобразования Фишера φ^*.
Порядковая шкала – это шкала классифицирующая по принципу «больше – меньше». Если в шкале наименований было безразлично, в каком порядке расположены классифицирующие ячейки, то в порядковой шкале они образуют последовательность от ячейки «самое малое значение» к ячейке «самое большое значение» (или наоборот). Измерение в этой шкале предполагает приписывание объектам чисел в зависимости от степени выраженности измеряемого свойства.
Кроме того, желательно соблюдать правило ранжирования для связанных рангов. Если два и более объектов имеют одинаковую выраженность измеряемого свойства, то объектам присваивается один и тот же средний ранг. Следующему объекту присваивается ранг, как если бы все предшествующие объекты различались. Это правило основано на соглашении соблюдения одинаковой суммы для связанных и несвязанных рангов. В соответствии с этим

правилом сумма всех рангов для группы численностью N должна равняться $\frac{N(N+1)}{2}$ вне зависимости от наличия или отсутствия связей в рангах.
Ячейки в порядковых шкалах часто называют классами («низкий», «большой» и т.п.). В порядковой шкале должно быть не менее трех классов. В порядковой шкале мы не знаем расстояний между классами, а знаем лишь, что они образуют последовательность. От классов легко перейти к числам, просто пронумеровав классы.
Итак, единица измерения в шкале порядка – расстояние в 1 класс или 1 ранг, при расстояние (реальное) между классами м рангами может быть разным (оно нам неизвестно).
Суть методов получения измерения в порядковой шкале: при сравнении объектов друг с другом можно сказать, больше или меньше выражено свойство, но нельзя определить – на сколько больше или меньше. Таким образом, при измерениях в ранговых шкалах из свойств чисел учитывается то, что они разные, и то, что одно число больше, чем другое.
Интервальная шкала – это шкала, классифицирующая по принципу «больше на определенное количество единиц – меньше на определенное количество единиц». Каждое значение признака отстоит от другого на равном расстоянии. Равным разностям между числами в этой шкале соответствуют равные разности в уровне выраженности измеренного свойства. Иначе говоря, измерения в этой шкале предполагает возможность применения единицы измерения (метрики).
Объекту присваивается число единиц измерения, пропорциональное выраженности измеряемого свойства. Важное свойство такой шкалы – произвольность выбора нулевой точки. Ноль не соответствует полному отсутствию свойства. Произвольность выбора нулевой точки означает, что измерение в этой шкале не соответствует абсолютному значению измеряемого свойства. Следовательно, применяя эту шкалу, можно судить насколько больше или меньше выражено свойство при сравнении объектов, но не можем судить, во сколько раз больше или меньше выражено свойство.
Типичный пример: измерение температуры по шкале Цельсия. 0 – точка замерзания воды, но не отсутствие температуры. Если сегодня +5, а завтра - +10, нельзя сказать, что сегодня в два раза холоднее, чем завтра.
На самом деле равноинтервальными можно считать лишь шкалы в единицах стандартного отклонения и процентильные шкалы, и то лишь при условии, что распределение значений в стандартизирующей выборке было нормальным.
Шкала равных отношений или абсолютная шкала – это шкала, классифицирующая объекты пропорционально степени выраженности измеряемого свойства. В шкалах отношений классы обозначаются числами, которые пропорциональны друг другу. Это предполагает наличие абсолютной нулевой точки отсчета. По отношению к показателю частот можно применять все арифметические операции.
В силу абсолютности нулевой точки в этой шкале можно определять во сколько раз больше или меньше выражено то или иное свойство.
Перечисленные шкалы полезно характеризовать по принципу дифференцирующей способности (мощности). В этом отношении шкалы располагаются в том порядке, в котором они приведены.

Меры центральной тенденции

Мера центральной тенденции – это число характеризующее выборку по уровню выраженности измеренного признака.
Существует три способа определения центральной тенденции, каждому из которых соответствует своя мера: мода, медиана и выборочное среднее.
Мода – это такое значение из множества измерений, которое встречается наиболее часто. Моде, или модальному интервалу, соответствует наибольший подъем графика

распределения частот. Если график распределения частот имеет одну вершину, то такое распределение называется унимодальным.
Когда два соседних значения встречаются одинаково часто и чаще, чем любые другие, мода есть среднее этих двух частот.
Распределение может иметь и не одну моду. Если все значения встречаются одинаково часто, то принято считать, что такое распределение не имеет моды.
Бимодальное распределение имеет на графике две вершины, даже если частоты для двух вершин не строго равны. В этом случае выделяют большую и меньшую моды. Может быть и большее число вершин. Тогда выделяют наибольшую и локальные моды. При этом отметим, что мода это значение признака, а не частота.
Медиана – это такое значение признака, которое делит упорядоченное (ранжированное) множество данных пополам, так что одна половина всех значений оказывается меньше медианы, а другая – больше.
Алгоритм получения медианы:

1. Упорядочивание всех значений по убыванию или возрастанию.
2. Если данные содержат нечетное число значений N, то медианой будет ее центральное значение, то есть значение с номером $\frac{N+1}{2}$
3. Если данные содержат четное число значений, то медиана точка, лежащая между двумя центральными значениями:

$$Md = \frac{x_{N/2} + x_{N/2+1}}{2}$$

Выборочное среднее – это оценка математического ожидания, которая вычисляется по формуле:

$$\overline{X} = M = \frac{\sum x_i}{n}$$

Здесь x_i - $i-e$ наблюдаемое значение признака *x, n* – количество наблюдений.

- **Выбор меры**

Каждая мера центральной тенденции обладает характеристиками, которые делают ее ценной в определенных условиях.
Оценка дисперсии проводится по формуле:

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - M)^2}{n-1}$$

Однако, чаще используется стандартное отклонение в генеральной выборке:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - M)^2}{n-1}}$$

В тех случаях, когда какие-нибудь причины благоприятствуют более частому появлению значений, которые выше или, наоборот, ниже среднего образуется асимметричное распределение.
Показатель асимметрии (*A*) вычисляется по формуле:

$$A = \frac{\sum (x_i - M)^2}{n - \sigma^3}$$

В тех случаях, когда какие-либо причины способствуют преимущественному появлению средних или близких к ним значений, образуется распределение с положительным

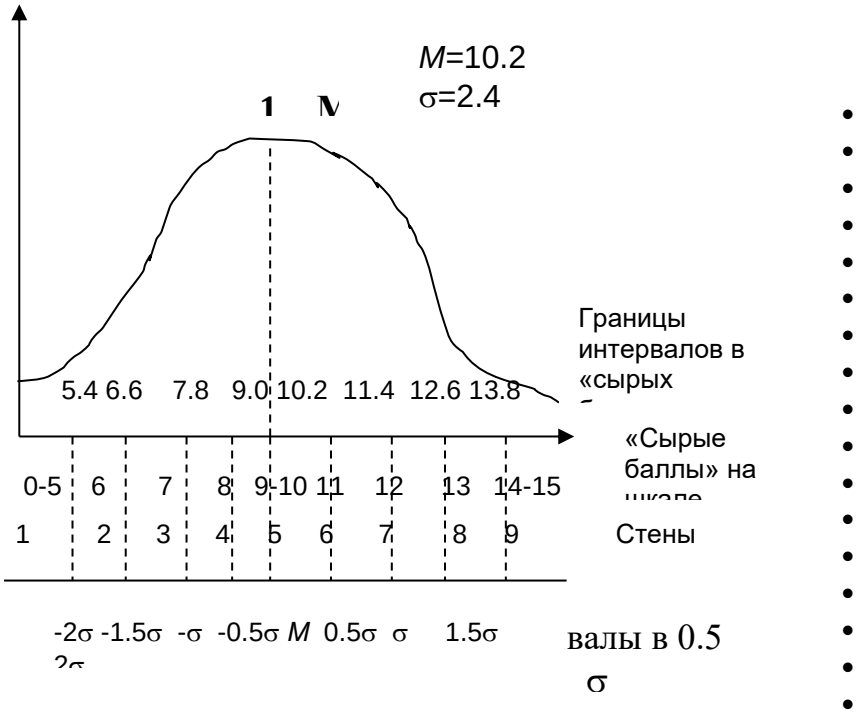
эксцессом. Если же в распределении преобладают крайние значения, причем одновременно и более низкие и более высокие, то такое распределение характеризуется отрицательным эксцессом и в центре распределения может образоваться впадина, превращая его в двувершинное.

Показатель эксцесса (E) определяется по формуле:

$$E = \frac{\sum (x_i - M)^4}{n - \sigma^4} - 3$$

Принцип построения большинства интервальных шкал основан на известном правиле «трех сигм». Примерно 98% всех значений признака при нормальном распределении укладывается в диапазон $M \pm 3\sigma$. Можно построить шкалу в единицах долей стандартного отклонения, которая будет охватывать весь возможный диапазон изменения признака, если крайний слева крайний справа интервалы останутся открытыми.

Например, Кенделл предложил шкалу стенов («стандартной десятки»). Среднее арифметическое значение в «сырых» баллах принимается за точку отсчета. Влево и вправо отмеряются интервалы равные ½ стандартного отклонения. Очень часто этот подход применяется в психологии.



Справа от среднего значения будут располагаться интервалы, равные 6 – 10 стенам, причем последний из интервалов открыт. Слева от среднего значения будут располагаться интервалы, соответствующие с 5 по 1 стен, и крайний левый будет открыт. Теперь мы поднимаемся вверх, к оси «сырых баллов», и размечаем границы интервалов в единицах «сырых баллов». Поскольку M = 10.2, σ = 2.4, вправо мы отложим 1/2σ, то есть 1.2 «сырых балла». Таким образом, граница интервала составит 11.4 «сырых балла». Итак, граница интервала, соответствующего 6 стену, будут простираться от 10.2 до 11.4 баллов. В этот интервал попадет одно «сырое» значение – 11.

Влево от среднего значения получаем интервал 9 – 10.2, соответствующий 5 стену. В него входит 2 «сырых» величины: 9 и 10. Отсюда мы видим, что в шкале стенов иногда на разное количество «сырых» баллов будет приходиться одинаковое количество стенов.

В принципе шкалу стенов можно построить по любым данным, измеренным по крайней мере в порядковой шкале, при объеме выборки n > 200 и нормальном распределении признака.

Другой способ построения равноинтервальной шкалы – группировка интервалов по принципу равенства накопленных частот. При нормальном распределении признак в окрестностях среднего значения группируется большая часть всех наблюдений, поэтому в этой области среднего значения интервалы оказываются уже, а по мере удаления от центра распределения они увеличиваются. Следовательно, такая процентильная шкала является равноинтервальной только относительно накопленной частоты.

-
- **Статистические гипотезы**

Статистические гипотезы подразделяются на нулевые и альтернативные, направленные и ненаправленные.

Нулевая гипотеза – это гипотеза об отсутствии различий. Она обозначается как H_0 и называется нулевой потому, что содержит число 0. $X_1 - X_2 = 0$, где X_1, X_2 - сопоставляемые значения признаков. Нулевая гипотеза – это то что мы пытаемся опровергнуть, если перед нами стоит задача доказать значимость различий.

Альтернативная гипотеза – это гипотеза о значимости различий. Она обозначается как H_1. Альтернативная гипотеза – это то, что мы хотим доказать. Поэтому иногда ее называют экспериментальной гипотезой.

Бывают задачи, когда необходимо доказать как раз не значимость различий, то есть подтвердить нулевую гипотезу. Например, если нам надо убедиться, что разные испытуемые получили хотя и различные, но уравновешенные по значимости задания, или что экспериментальная и контрольная выборки не различаются между собой по каким-то значимым характеристикам. Нулевая и альтернативная гипотезы могут быть направленными и ненаправленными.

<u>Направленные гипотезы:</u>

$H_0: X_1$ не превышает X_2

$H_1: X_1$ превышает X_2

<u>Ненаправленные гипотезы</u>

$H_0: X_1$ не отличается от X_2

$H_1: X_1$ отличается от X_2

Например, если замечено, что в одной из групп изделий проверяемых по какому-либо признаку значения выше, чем в другой группе, то для проверки значимости этих различий необходимо сформировать направленную гипотезу.

Если же мы захотим доказать, что в группе А под влиянием каких-то экспериментальных воздействий произошли более выраженные изменения, чем в группе Б, то нам тоже надо сформулировать направленные гипотезы.

Если же мы хотим доказать, что различается форма распределения в группах А и Б, то формулируется ненаправленная гипотеза.

Проверка гипотез проводится с помощью критериев статистической оценки различий.

- **Статистический критерий**

Статистический критерий – это решающее правило, обеспечивающее надежное поведение, то есть принятие истинной и отклонение ложной гипотезы с высокой вероятностью.

Статистические критерии обозначают также метод расчета определенного числа и само это число.

Когда, мы говорим, что достоверность различий определяется по критерию χ^2, то имеем в виду, что использовали метод χ^2 для расчета определенного числа.
По соотношению эмпирического и критического значений критериев судят о том, подтверждается или опровергается гипотеза. Например, если $\chi^2_{эмп} > \chi^2_{кр}$, H_0 отвергается.
В большинстве случаев для того, чтобы признать различия значимыми, необходимо, чтобы эмпирическое значение критерия превышало критическое, хотя есть критерии (например, критерий знаков), в которых надо придерживаться противоположного правила.
Эти правила должны оговариваться в руководстве по использованию критерия.
В некоторых случаях расчетная формула критерия включает в себя количество наблюдений в исследуемой выборке *n*. В этом случае эмпирическое значение критерия одновременно является тестом для проверки статистических гипотез. По специальной таблице определяется, какому уровню статистической значимости различий соответствует данная эмпирическая величина. Примером такого критерия является критерий φ^*, вычисляемый на основе углового преобразования Фишера.
В большинстве случаев одно и то же эмпирическое значение критерия может оказаться значимым или незначимым в зависимости от количества наблюдений в исследуемой выборке *n* или от количества степеней свободы *v*.
Число степеней свободы *v* равно числу классов вариационного ряда минус число условий, при которых он был сформирован. К числу таких условий относится объем выборки, среднее и дисперсия.
Если наблюдения расклассифицированы по классам какой-либо номинативной шкалы и подсчитано количество наблюдений в каждой ячейке классификации, то получается частотный вариационный ряд. Единственное условие, которое соблюдается при таком формирование – объем выборки *n*. Поэтому, если классификация проводится по трем классам, а число испытаний равно 50, мы свободны только в определении количества наблюдений только в двух классах, количество наблюдений в третьем классе будет определяться первыми двумя. Следовательно, здесь имеем $v = c - 1 = 3$.
Существуют и более сложные способы подсчета степеней свободы, которые будут рассмотрены далее.
Зная *n* и/или число степеней свободы, по специальным таблицам можно определить критическое значение критерия и сопоставить с ним эмпирическое значение.
Критерии делятся на параметрические и непараметрические.
Параметрические критерии включают в формулу расчета параметры распределения, то есть, чаще всего, среднее и дисперсию (*t* – критерий Стьюдента, критерий *F* и др.).
Непараметрические критерии не включают в формулу расчета параметры распределения и основаны на оперировании частотами или рангами (критерий Q Розенбаума, критерий Т. Вилкоксона и др.).

Возможности и ограничения параметрических и непараметрических критериев

№	Параметрические критерии	Непараметрические критерии
1	Позволяют прямо оценить различия в средних, полученные в двух выборках (t – критерий Стьюдента)	Позволяют оценить лишь средние тенденции, например, ответить на вопрос, чаще ли в выборке А встречаются более высокие, а в выборке Б – более низкие значения признака (критерии Q, U и др.)

2	Позволяют прямо определить различия в дисперсиях (критерий Фишера)	Позволяют оценить лишь различия в диапазонах вариативности признака (критерий φ^*)
3	Позволяют выявить тенденции изменения признака при переходе от условия к условию (дисперсионный однофакторный план), но лишь при условии нормального распределения признака	Позволяют выявить тенденции изменения признака при переходе от условия к условию при любом распределении признака (критерии тенденций L и Q)
4	Позволяет оценивать взаимодействие двух и более факторов и их влияние на изменение признака (двухфакторный дисперсионный анализ)	Эта возможность отсутствует
5	Экспериментальные данные должны отвечать двум, а иногда трем, условиям: А) значения признака измерены по интервальной шкале Б) распределение признака является нормальным В) в дисперсионном анализе должно соблюдаться требование равенства дисперсий в ячейке комплекса	Экспериментальные данные могут не отвечать ни одному из этих условий: А) значения признаков могут быть представлены в любой шкале, начиная от шкалы наименований Б) распределение признака может быть любым и совпадение его с каким-либо теоретическим законом распределения необязательно и не нуждается в проверке В) требование равенства дисперсий отсутствует
6	Математические расчеты достаточно сложны	Математические расчеты по большей части просты и занимают мало времени (за исключением критериев χ^2 и λ)
7	Если условие 5 выполняется, параметрические критерии оказываются более мощными	Если условия 5 не выполняются, непараметрические критерии оказываются более мощными

Уровни значимости

Уровень значимости – это вероятность того, что мы сочли различия существенными, а они на самом деле случайны. Таким образом, уровень значимости – это вероятность отклонения нулевой гипотезы, в то время как она верна. Ошибка, состоящая в том, что мы отклонили нулевую гипотезу, в то время как она верна, называется ошибкой 1 рода и обозначается α. Если вероятность ошибки – это α, то вероятность правильного решения 1 - α. Чем меньше α, тем больше вероятность правильного решения.

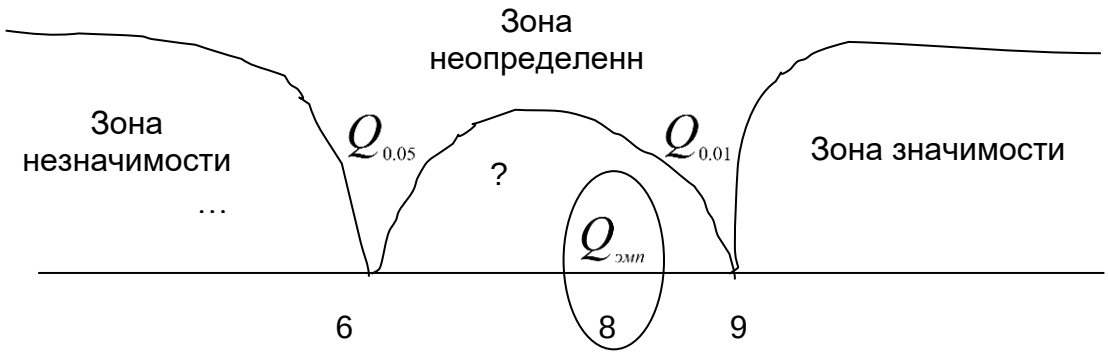
Будем обозначать гипотезу об отсутствии различий - H_0, а о статистической достоверности различий - H_1.

Правило отклонения H_0 и принятия H_1.

Если эмпирическое значение критерия равняется критическому значению, соответствующему $\rho \leq 0.05$ (например, так исторически сложилось в психологии) или превышает его, то H_0 отвергается, но мы еще не можем определенно принять H_1.

Если эмпирическое значение критерия равняется критическому значению, соответствующему $\rho \leq 0.01$ или превышает его, то H_0 отклоняется и принимается H_1.

Исключение: критерий знаков G, критерий Т. Вилкоксона, критерий U Манна – Уитни. Для них установлено обратное соотношение.
Для иллюстрации правила иногда используют «ось значимости».



Пример «оси значимости» для критерия Q Розенбаума

Критические значения критерия обозначим $Q_{0.05}, Q_{0.01}$, эмпирическое значение критерия как $Q_{эмп}$.
Уровень статистической значимости или критические значения критериев определяются по-разному при проверке направленных и ненаправленных статистических гипотез.
При направленной статистической гипотезе используется односторонний критерий, при ненаправленной гипотезе – двусторонний критерий.

- **Мощность критерия**

Мощность критерия – это его способность выявлять различия, если они есть. Иными словами, это его способность отклонить нулевую гипотезу об отсутствии различий, если она неверна.
Ошибка, состоящая в том, что мы приняли нулевую гипотезу, в то время как она неверна, называется ошибкой второго рода.
Вероятность такой ошибки обозначается β. Мощность критерия – это его способность не допустить ошибку второго рода. Поэтому:
«Мощность» = 1 - β
Мощность критерия определяется эмпирическим путем. Одни и те же задачи могут быть решены разным путем. При этом обнаруживается, что некоторые критерии позволяют выявит различия там, где другие оказываются неспособны это сделать, или выявляют более высокий уровень значимости различий. Тогда возникает вопрос, зачем использовать менее мощные критерии? Дело в том, что основанием для выбора критерия может быть не только мощность критерия, но и другие его характеристики, а именно:

a) Простота;
b) Более широкий диапазон использования (например, по отношению к данным, определенным по номинативной шкале, или по отношению к большим n)
c) Применимость по отношению к неравным по размеру выборкам
d) Большая информативность результатов.

Классификация задач и методов их решения

Множество задач, связанных с объектным анализом, предполагают сопоставление объектов. Мы сопоставляем группы объектов по какому-либо признаку, чтобы выявить различия между ними по этому признаку. Мы сопоставляем то, что было «до» с тем, что

было «после» наших экспериментальных или любых иных воздействий, чтобы определить эффективность этих воздействий. Мы сопоставляем эмпирическое распределение значений признака с каким-либо теоретическим законом распределения или два эмрирических распределения между собой, с тем, чтобы доказать неслучайность выбора альтернатив или различий в форме распределений.

Мы, даже, можем сопоставить два правила, измеренные на одной и той же выборке объектов, чтобы установить степень согласованности их изменений, их сопряженность, корреляцию между ними.

Наконец, мы можем сопоставить индивидуальные значения, полученные при разных комбинациях каких-либо существенных условий, с тем чтобы выявить характер взаимодействия этих условий и их влияния на индивидуальные значения признака.

Приведем классификацию задач и методов их решения.

№	Задача	Условие	Методы
1	Выявление различий в уровне исследуемого признака	А) 2 выборки объектов	Q – критерий Розенбаума U – критерий Манна – Уитни φ^* – критерий (угловое преобразование Фишера)
		Б) 3 и более выборок объектов	S – критерий Джонкира H – критерий Крунскала - Уоллиса
2	Оценка сдвига значений исследуемого признака	А) 2 замера на одной и той же выборке объектов	T – критерий Вилкоксона G – критерий знаков φ^* – критерий (угловое преобразование Фишера)
		Б) 3 и более замеров на одной выборке объектов	χ^2_x - критерий Фридмана L – критерий тенденций Пейджа
3	Выявление различий в распределении признака	А) При сопоставлении эмпирического распределения с теоретическим	χ^2 - критерий Пирсона λ -критерий Колмогорова – Смирнова m – биноминальный критерий
		Б) При сопоставлении двух эмпирических распределений	χ^2 - критерий Пирсона λ -критерий Колмогорова – Смирнова φ^* – критерий (угловое преобразование Фишера)

4	Выявление степени согласованности изменений	А) Двух признаков	r_s - коэффициент ранговой корреляции Спирмена
		Б) Двух иерархий или профилей	r_s - коэффициент ранговой корреляции Спирмена
5	Анализ изменений признака под влиянием контролируемых условий	А) Под влиянием одного фактора	S – критерий тенденций Джонкира L – критерий тенденций Пейджа Однофакторный дисперсионный анализ Фишера
		Б) Под влиянием двух факторов одновременно	Двухфакторный дисперсионный анализ Фишера

- **Принятие решения о выборе метода математической обработки**

Алгоритм 1. Принятие решения о задаче и методе обработке, на стадии, когда данные уже получены.

1. По второму столбцу таблицы, какая задача стоит в вашем исследовании.
2. По третьему столбцу определить, каковы условия решения задачи, например, сколько выборок обследовано или на какое количество групп можно разделить обследованную выборку.
3. Обратиться к алгоритму принятия решения о выборе критерия (приведены ниже) и определить, какой именно метод или критерий целесообразно применять.

Алгоритм 2. Принятие решения о задаче и методе обработки на стадии планирования исследования.

1. Определить, какая модель кажется наиболее подходящей для проведения исследований.
2. Ознакомьтесь с описанием метода.
3. Проверьте ограничения критерия и решите, сможете ли вы собрать данные, которые будут отвечать этим ограничениям (объемы выборки, наличие нескольких выборок, монотонность по какому-либо признаку и т.д.).
4. Провести исследование, а затем обработать данные по заранее выбранному алгоритму, если удалось выполнить ограничения.
5. Если ограничения выполнить не удалось, обратитесь к алгоритму 1.

Желательно анализировать критерии в следующем порядке:

- × Назначение критерия
- × Описание критерия
- × Гипотезы, которые он позволяет проверить
- × Графическое представление критерия
- × Ограничения критерия
- × Пример или примеры

5. Информационные и образовательные технологии

Информационные и образовательные технологии

№ п/п	***Наименование раздела***	***Виды учебной работы***	***Формируемые компетенции (указывается код компетенции)***	***Информационные и образовательные технологии***
1	***2***	***3***	***4***	***5***
1	Причины возникновения исследования операций.	*Лекция* *Лабораторная работа.* *Самостоятельная работа*	*(ПК-8)* *(ПК-1) (ПК-8)* (ОК-4)	Лекция-визуализация с применением слайд-проектора, Дискуссия, Лекция с разбором конкретных ситуаций Дискуссия, Консультирование с разбором абстрактных ситуаций Использование электронного курса лекций, Консультирование и проверка заданий посредством электронной почты
2	Предмет исследования операций. Классы операционных задач.	*Лекция* *Лабораторная работа* *Самостоятельная работа*	*(ПК-8)* *(ПК-1) (ПК-8)* (ОК-4)	Лекция-визуализация с применением слайд-проектора, Дискуссия, Лекция с разбором конкретных ситуаций
3	Примеры упрощенных задач исследования операций.	*Лекция* *Лабораторная работа* *Самостоятельная работа*	*(ПК-8)* *(ПК-1) (ПК-8)* (ОК-4)	Дискуссия, Консультирование с разбором абстрактных ситуаций
4	Задача оптимизации поставок скоропортящихся товаров.	*Лекция*	*(ПК-8)* *(ПК-1) (ПК-8)*	Использование электронного курса лекций, Консультирование и проверка заданий

		Лабораторная работа *Самостоятельная работа*	(ОК-4)	посредством электронной почты
5	Задача прогнозирования спроса на товары длительного пользования с помощью логистической функции.	*Лекция* *Лабораторная работа* *Самостоятельная работа*	*(ПК-8)* *(ПК-1) (ПК-8)* (ОК-4)	Лекция-визуализация с применением слайд-проектора, Дискуссия, Лекция с разбором конкретных ситуаций
6	Описание моделей динамических систем.	*Лекция* *Лабораторная работа* *Самостоятельная работа*	*(ПК-8)* *(ПК-1) (ПК-8)* (ОК-4)	Дискуссия, Консультирование с разбором абстрактных ситуаций
7	Линейные непрерывные системы. Линейные дискретные системы.	*Лекция* *Лабораторная работа* *Самостоятельная работа*	*(ПК-8)* *(ПК-1) (ПК-8)* (ОК-4)	Использование электронного курса лекций, Консультирование и проверка заданий посредством электронной почты
8	Основные конфигурации соединения динамических систем (последовательное, параллельное соединение, конфигурация систем с обратной связью).	*Лекция* *Лабораторная работа* *Самостоятельная работа*	*(ПК-8)* *(ПК-1) (ПК-8)* (ОК-4)	Лекция-визуализация с применением слайд-проектора, Дискуссия, Лекция с разбором конкретных ситуаций
9	Модели операционных задач. Функции моделей.	*Лекция* *Лабораторная работа* *Самостоятельная работа*	*(ПК-8)* *(ПК-1) (ПК-8)* (ОК-4)	Дискуссия, Консультирование с разбором абстрактных ситуаций

10	Классификация и структура моделей. Задачи анализа, управления и идентификации.	*Лекция* *Лабораторная работа* *Самостоятельная работа*	*(ПК-8)* *(ПК-1) (ПК-8)* (ОК-4)	Использование электронного курса лекций, Консультирование и проверка заданий посредством электронной почты
11	Функциональные блоки сложных систем (элементы преобразования, сортировки и обратной связи). Математические модели элементов системы.	*Лекция* *Лабораторная работа* *Самостоятельная работа*	*(ПК-8)* *(ПК-1) (ПК-8)* (ОК-4)	Лекция-визуализация с применением слайд-проектора, Дискуссия, Лекция с разбором конкретных ситуаций
12	Структурные схемы системы. Основные конфигурации соединения систем. Системы с дискретным временем. Модель склада.	*Лекция* *Лабораторная работа* *Самостоятельная работа*	*(ПК-8)* *(ПК-1) (ПК-8)* *(ОК-4)*	Дискуссия, Консультирование с разбором абстрактных ситуаций
13	Методика проведения исследования операций. Основные этапы исследования операций. Определение целей.	*Лекция* *Лабораторная работа* *Самостоятельная работа*	*(ПК-8)* *(ПК-1) (ПК-8)* *(ОК-4)*	Использование электронного курса лекций, Консультирование и проверка заданий посредством электронной почты
14	Составление плана разработки проекта. Формулировка проблемы. Построение модели. Разработка вычислительного метода.	*Лекция* *Лабораторная работа* *Самостоятельная работа*	*(ПК-8)* *(ПК-1) (ПК-8)* *(ОК-4)*	Лекция-визуализация с применением слайд-проектора, Дискуссия, Лекция с разбором конкретных ситуаций
15	Разработка ТЗ на программирование. Программирование и отладка. Сбор данных. Проверка моделей. Реализация результатов.	*Лекция* *Лабораторная работа*	*(ПК-8)* *(ПК-1) (ПК-8)*	Дискуссия, Консультирование с разбором абстрактных ситуаций

		Самостоятельная работа	*(ОК-4)*	

6. Фонд оценочных средств для текущего, рубежного и итогового контролей по итогам освоению дисциплины (модулей)

6.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения дисциплины

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения дисциплины представляется в виде таблицы:

№ п/п	***Контролируемые разделы дисциплины (модулей)***	***Код контролируемой компетенции (компетенций)***	***Наименование оценочного средства***
1	Причины возникновения исследования операций.	*(ПК-1)* *(ПК-8) (ОК-4)*	Задача (практическое задание) Коллоквиум (Вопросы по темам/разделам дисциплины)
2	Предмет исследования операций. Классы операционных задач.	*(ПК-1)* *(ПК-8) (ОК-4)*	Задача (практическое задание) Коллоквиум (Вопросы по темам/разделам дисциплины)
3	Примеры упрощенных задач исследования операций.	*(ПК-1)* *(ПК-8) (ОК-4)*	Задача (практическое задание) Коллоквиум (Вопросы по темам/разделам дисциплины) ТЕСТ
4	Задача оптимизации поставок скоропортящихся товаров.	*(ПК-1)* *(ПК-8) (ОК-4)*	Задача (практическое задание) Коллоквиум (Вопросы по темам/разделам дисциплины)

5	Задача прогнозирования спроса на товары длительного пользования с помощью логистической функции.	*(ПК-1)* *(ПК-8) (ОК-4)*	Задача (практическое задание) Коллоквиум (Вопросы по темам/разделам дисциплины)
6	Описание моделей динамических систем.	*(ПК-1)* *(ПК-8) (ОК-4)*	Контрольная работа
7	Линейные непрерывные системы. Линейные дискретные системы.	*(ПК-1)* *(ПК-8) (ОК-4)*	Задача (практическое задание) Коллоквиум (Вопросы по темам/разделам дисциплины)
8	Основные конфигурации соединения динамических систем (последовательное, параллельное соединение, конфигурация систем с обратной связью).	*(ПК-1)* *(ПК-8) (ОК-4)*	Задача (практическое задание) Коллоквиум (Вопросы по темам/разделам дисциплины)
9	Модели операционных задач. Функции моделей.	*(ПК-1)* *(ПК-8) (ОК-4)*	Задача (практическое задание) Коллоквиум (Вопросы по темам/разделам дисциплины)
10	Классификация и структура моделей. Задачи анализа, управления и идентификации.	*(ПК-1)* *(ПК-8) (ОК-4)*	Задача (практическое задание) Коллоквиум (Вопросы по темам/разделам дисциплины)
11	Функциональные блоки сложных систем (элементы преобразования, сортировки и обратной связи). Математические модели элементов системы.	*(ПК-1)* *(ПК-8) (ОК-4)*	Контрольная работа
12	Структурные схемы системы. Основные конфигурации соединения систем. Системы с дискретным временем. Модель склада.	*(ПК-1)* *(ПК-8) (ОК-4)*	Задача (практическое задание) Коллоквиум (Вопросы по темам/разделам дисциплины)

13	Методика проведения исследования операций. Основные этапы исследования операций. Определение целей.	*(ПК-1)* *(ПК-8) (ОК-4)*	Задача (практическое задание) Коллоквиум (Вопросы по темам/разделам дисциплины)
14	Составление плана разработки проекта. Формулировка проблемы. Построение модели. Разработка вычислительного метода.	*(ПК-1)* *(ПК-8) (ОК-4)*	Задача (практическое задание) Коллоквиум (Вопросы по темам/разделам дисциплины)
15	Разработка ТЗ на программирование. Программирование и отладка. Сбор данных. Проверка моделей. Реализация результатов.	*(ПК-1)* *(ПК-8) (ОК-4)*	Контрольная работа

6.2. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Методические материалы составляют систему текущего, рубежного и итогового (экзамена) контролей освоения дисциплины (модулей), закрепляют виды и формы текущего, рубежного и итогового контролей знаний, сроки проведения, а также его сроки и формы проведения (устный экзамен, письменный экзамен и т.п.). В системе контроля указывается процедура оценивания результатов обучения, при использовании балльно-рейтинговой системы приводится таблица с баллами и требованиями к пороговым значениям достижений по видам деятельности обучающихся; показывается механизм получения оценки (из чего складывается оценка по дисциплине (модулю).

Текущий контроль *осуществляется в виде опроса, участие в дискуссии на семинаре, выполнение самостоятельной работы и других видов работ, указанных в УМК, а также посещаемости студентов занятий - оценивается до 80 баллов.*

Рубежный контроль *(сдача модулей) проводится преподавателем и представляет собой письменный контроль, либо компьютерное тестирование знаний по теоретическому и практическому материалу. Контрольные вопросы рубежного контроля включают полный объём материала части дисциплины (модулей), позволяющий оценить знания, обучающихся по изученному материалу и соответствовать УМК дисциплины, которое оценивается до 20 баллов.*

Итоговый контроль *(экзамен) знаний принимается по экзаменационным билетам, включающий теоретические вопросы и практическое задание, и оценивается до 20 баллов.*

Форма контроля	*Срок отчетности*	*Макс. количество баллов*

		За одну работу	Всего
Текущий контроль: *- Прием лабораторных работ* *-опрос* *- посещаемость*	*1,2,3,4,5,6,7,8 недели* *1, ,2,3,4,5,6,7,8 недели* *1, ,2,3,4,5,6,7,8 неделя*	*8 баллов* *6 баллов* *2 балла*	*До 40 баллов* *До 30 баллов* *10 баллов*
Рубежный контроль: *(сдача модуля)*	*8 неделя*	*100%×0,2=20 баллов*	
Итого за I модуль			*До 100 баллов*

Форма контроля	*Срок отчетности*	*Макс. количество баллов*	
		За одну работу	*Всего*
Текущий контроль: *- Прием лабораторных работ* *-опрос* *- посещаемость*	*9,10,11,12,13,14,15 недели* *9,10,11,12,13,14,15 недели* *9,10,11,12,13,14,15 недели*	*10 баллов* *6 баллов* *2 балла*	*До 40 баллов* *До 30 баллов* *10 баллов*
Рубежный контроль: *(сдача модуля)*	*15 неделя*	*100%×0,2=20 баллов*	
Итого за II модуль			*До 100 баллов*

Форма контроля	*Срок отчетности*	*Макс. количество баллов*	
		За одну работу	*Всего*
Текущий контроль: *- Прием лабораторных работ* *-опрос* *- посещаемость*	*1,2,3,4,5,6,7,8 недели* *1, ,2,3,4,5,6,7,8 недели* *1, ,2,3,4,5,6,7,8 неделя*	*8 баллов* *6 баллов* *2 балла*	*До 40 баллов* *До 30 баллов* *10 баллов*
Рубежный контроль: *(сдача модуля)*	*8 неделя*	*100%×0,2=20 баллов*	

Итого за I модуль			*До 100 баллов*

Форма контроля	*Срок отчетности*	*Макс. количество баллов*	
		За одну работу	*Всего*
Текущий контроль:			
- Прием лабораторных работ	*9,10,11,12,13,14,15 недели*	*10 баллов*	*До 40 баллов*
-опрос	*9,10,11,12,13,14,15 недели*	*6 баллов*	*До 30 баллов*
- посещаемость	*9,10,11,12,13,14,15 недели*	*2 балла*	*10 баллов*
Рубежный контроль: (сдача модуля)	*15 неделя*	*100%×0,2=20 баллов*	
Итого за II модуль			*До 100 баллов*

Экзаменатор выставляет по результатам балльной системы в семестре экзаменационную оценку без сдачи экзамена, набравшим суммарное количество баллов, достаточное для выставления оценки от 55 и выше баллов – автоматически (при согласии обучающегося).

Полученный совокупный результат (максимум 100 баллов) конвертируется в традиционную шкалу:

Рейтинговая оценка (баллов)	Оценка экзамена
От 0 - до 54	неудовлетворительно
от 55 - до 69 включительно	удовлетворительно
от 70 – до 84 включительно	хорошо
от 85 – до 100	отлично

6.3.Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Текущий контроль (0 - 80 баллов)

При оценивании посещаемости, опроса и приема лабораторных работ из расчета на одну неделю учитываются:

- посещаемость (2 балла одно занятие (10 баллов за модуль)

- степень раскрытия содержания материала (2.8 балла одно занятие (14 баллов за модуль);

- изложение материала (грамотность речи, точность использования терминологии и символики, логическая последовательность изложения материала (2.8 балла одно занятие (14 баллов за модуль);
- знание теории изученных вопросов (2.8 балла одно занятие (14 баллов за модуль);
- сформированность и устойчивость используемых при ответе умений и навыков (2.8 балла одно занятие (14 баллов за модуль);
-точность решения задачи (2.8 балла одно занятие (14 баллов за модуль).

Рубежный контроль (0 – 20 баллов)

При оценивании контрольной работы учитывается:

- полнота выполненной работы (задание выполнено не полностью и/или допущены две и более ошибки или три и более неточности) – 8 баллов;
- обоснованность содержания и выводов работы (задание выполнено полностью, но обоснование содержания и выводов недостаточны, но рассуждения верны) – 14 баллов;
- работа выполнена полностью, в рассуждениях и обосновании нет пробелов или ошибок, возможна одна неточность - 17 баллов.
- работа выполнена полностью, в рассуждениях и обосновании нет пробелов или ошибок - 20 баллов.

При оценивании теста учитывается:

- полнота выполненной работы (задание выполнено не полностью и/или допущены две и более ошибки или три и более неточности) – до 20 баллов;

Итоговый контроль (экзаменационная сессия) - ИК = Бср × 0,8+Бэкз × 0,2

При проведении итогового контроля обучающийся должен ответить на 3 вопроса (два вопроса теоретического характера и один вопрос практического характера).

При оценивании ответа на вопрос теоретического характера учитывается:
- теоретическое содержание не освоено, знание материала носит фрагментарный характер, наличие грубых ошибок в ответе (2 балла);
- теоретическое содержание освоено частично, допущено не более двух-трех недочетов (5 баллов);
- теоретическое содержание освоено почти полностью, допущено не более одного-двух недочетов, но обучающийся смог бы их исправить самостоятельно (8 баллов);
- теоретическое содержание освоено полностью, ответ построен по собственному плану (10 баллов).

При оценивании ответа на вопрос практического характера учитывается:
- ответ содержит менее 20% правильного решения (3 балла);
- ответ содержит 21-89 % правильного решения (7 баллов);
- ответ содержит 90% и более правильного решения (10 баллов).

6.4.Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности.

Раздел УМК включает образцы оценочных средств, примерные перечни вопросов и заданий в соответствии со структурой дисциплины и системой контроля.

Контрольные вопросы

1. Предмет исследования операций.
2. Классы операционных задач.
3. Модели операционных задач.
4. Функции моделей.
5. Классификация и структура моделей.
6. Модели операционных задач. Задачи анализа, управления и идентификации.
7. Примеры упрощенных задач исследования операций. Задача поставщиков сырья (линейное программирование).
8. Примеры упрощенных задач исследования операций. Задача оптимизации поставок скоропортящихся товаров.
9. Примеры упрощенных задач исследования операций. Задача прогнозирования спроса на товары длительного пользования с помощью логистической функции
10. Функциональные блоки сложных систем (элементы преобразования, сортировки и обратной связи).
11. Математические модели элементов системы. Структурные схемы системы. Основные конфигурации соединения систем.
12. Системы с дискретным временем. Модель склада.
13. Описание моделей динамических систем. Линейные непрерывные системы.
14. Описание моделей динамических систем. Линейные дискретные системы.
15. Основные конфигурации соединения динамических систем (последовательное, параллельное соединение, конфигурация систем с обратной связью).
16. Методика проведения исследования операций. Основные этапы исследования операций.
17. Методика проведения исследования операций. Определение целей. Составление плана разработки проекта.

Тест

ТЕСТОВОЕ ЗАДАНИЕ
Термин исследование операций характеризует: 1. Применение математических количественных методов для обоснования решений 2. Использование операционного подхода для решений дифференциальных уравнений 3. Отчет о проделанных хирургических операциях

Характерные черты операционного подхода - это: 1. Изучение технических аспектов проведения операций 2. Оценка решения и оценка его правильности 3. Построение модели (формализация), постановка задачи (описание цели операции)
Термин «исследование операций» возник в связи с: 1. Хирургическими операциями 2. Экономическими операциями 3. Военными операциями
Термин «исследование операций» подразумевает: 1. Применение математических методов для обоснования принимаемых решений 2. Изучение военных операций 3. Изучение экономических операций
Какой класс задач не относится к операционным? 1. Массового обслуживания 2. Накопления 3. Управления запасами
Что не является функцией модели: 1. Модель как инструмент прогнозирования 2. Модель как средство обучения 3. Модель как инструмент оптимизации
Модель операционной задачи – это:

1. Представление системы в некоторой форме, отличной от формы её реального существования 2. Операционная схема действий с переменными системы 3. Схема обработки информации
К какому классу операционных задач относится транспортная задача? 1. управление запасами 2. задачи распределения; 3. задачи массового обслуживания; 4. задачи транспортного обслуживания.
Каким уравнением описывается модель зависимости спроса на товары длительного пользования (t - текущее время; y(t) - обеспеченность товаром; A - насыщенность товаром; K - коэффициент пропорциональности)? 1. dy(t)/dt = Ky(t)(A+y(t)); 2. dy(t)/dt = Ky(t)(A-y(t)); 3. dy(t)/dt = Ky(t)(A-y(t))^2;
Модель зависимости спроса на товары длительного пользования описывается 1. нелинейным дифференциальным уравнением; 2. алгебраическим уравнением; 3. линейным дифференциальным уравнением.
Продавец газет в "Задаче уличного продавца газет" максимизирует: 1. математическое ожидание своей прибыли; 2. дисперсию своей прибыли; 3. стандартное отклонение своей прибыли; 4. вероятность получения максимальной прибыли.

Если спрос в некоторый день превышает число заказанного продавцом скоропортящегося товара, то прибыль продавца равна:

1. произведению числа заказываемого в день товара и прибыли на единицу товара.
2. отношению убытка на каждую возвращенную единицу товара к размеру чистой прибыли в день.
3. произведению числа заказываемого в день товара и убытка на каждую возвращенную единицу товара.
4. математическому ожиданию прибыли, рассчитанному с использованием вероятностей принятия спросом определенных значений в случайно выбранный день.

. Каким образом решается проблема нахождения оценок параметров в модели спроса на товары длительного пользования?

1. путем перехода от разностного уравнения к дифференциальному уравнению;
2. путем перехода к рассмотрению вероятностной модели;
3. путем включения дополнительных параметров;
4. путем перехода от дифференциального уравнения к разностному уравнению.

Каким уравнением определяются издержки производства в модели максимизации прибыли фирмы, выпускающей однотипную продукцию?

1. $P(Y) = R(Y) - I(Y)$;
2. $I(Y)=cY2+dY+e$;
3. $R(Y)=vY$;
4. $v = a - bY$.

Какая функция является целевой в модели фирмы, выпускающей однотипную продукцию?

1. чистой прибыли;

2. издержек; 3. цены за единицу товара; 4. дохода от реализации.
Какое утверждение относительно коэффициента b в уравнении цены единицы товара (v = a - bY) в модели максимизации прибыли фирмы, выпускающей однотипную продукцию, является справедливым? 1. коэффициент определяет скорость снижения цены по мере увеличения предложения товара; 2. большим значениям коэффициента соответствует более медленное снижение цены. 3. коэффициент связывает величину спроса и предложения на товар; 4. коэффициент показывает уровень насыщенности спроса.
Модель реализации скоропортящихся товаров является примером: 1. модели принятия решений в условиях неопределенности; 2. модели, описываемой дифференциальным уравнением первого порядка; 3. детерминированной модели; 4. модели, описываемой линейным разностным уравнением.
К чему приводит увеличение коэффициента пропорциональности К при фиксированном коэффициенте насыщенности А в модели спроса на товары длительного пользования ($dy(t)/dt = Ky(t)(A-y(t))$)? 1. к более быстрому достижению уровня насыщенности спроса; 2. к более медленному достижению уровня насыщенности спроса; 3. к колебаниям в значениях величины спроса; 4. к необходимости модификации вычислительного метода.
Для чего применяется метод наименьших квадратов? 1. для идентификации моделей систем;

2. для решения дифференциальных уравнений; 3. для оценки эффективности управленческих решений;
Найденные использованием МНК параметры в модели спроса на товары длительного пользования используются для: 1. иллюстрации закона спроса и предложения; 2. прогнозирования величины спроса; 3. установления зависимости спроса на товары длительного пользования от спроса на товары-заменители; 4. получения эмпирических данных изменения предложения товаров длительного пользования.
Если n - количество измерений, проведенных на объекте, m - количество неизвестных параметров модели, то для оценки по МНК процедуре достаточно 1. n<m измерений; 2. n=m измерений; 3. n>m измерений; 4. Empty
Невязка в методе наименьших квадратов это 1. разница между измерением выхода объекта и выхода, просчитанного по модели; 2. разница между измерением входа объекта и выхода, просчитанного по модели; 3. разница между измерением входа объекта и входа, просчитанного по модели;
Квадрат невязки в методе наименьших квадратов обусловлен 1. учетом квадратичных особенностей функции невязки; 2. наличием квадратичной функции в описании модели; 3. использованием процедуры квадратичного программирования;

Можно ли пользуясь методом наименьших квадратов идентифицировать модель объекта, описываемого дифференциальным уравнением? 1. нельзя; 2. можно с привлечением других методов; 3. можно;
Метод наименьших квадратов позволяет: 1. определить вид функции аппроксимации эмпирических данных; 2. определить значения параметров модели; 3. ответы 1 и 2; 4. все ответы неверны.
Если аппроксимирующая функция имеет вид y=f(x)*a, и коэффициенты a записаны в виде вектора-столбца длиной m, то регрессоры запишутся в виде: 1. вектора-строки длиной m; 2. вектора-столбца длиной m; 3. квадратной матрицы размера m x m; 4. прямоугольной матрицы размера m x (m-1).
Какой из операторов Matlab решает дифференциальное уравнение в аналитическом виде: 1. solve 2. diff 3. dsolve
Определите результат счета следующего фрагмента программы (script Malaba) s=? s=-1;

```
for i=1:-1:-1
   s=2*s-1;
end
```

1. s=-15
2. s=-14
3. s=14

Определите результат счета следующего фрагмента программы (script Malaba) s=?

```
s=-1;
for i=1:-1:-1
   s=2*s-1;
   if i==0
      break
   end
end
```

1. s=-15
2. s=-7
3. s=-14

Определите результат счета следующего фрагмента программы (script Malaba) s=?

```
s=-1;
while s<0
   s=s-1;
   if s<=-1.5
      break
   end
end
```

1. s=2

2. s=1
3. s=-2

Определите результат счета следующего фрагмента программы (script Malaba) s=?

```
s=5;
while s<0
   s=s-1;
   if s<3.5
      break
   end
end
```

1. s=5
2. s=-1
3. s=-2

62. Какой из операторов Matlab решает функцию по её аналитическому виду:

1. ezplot
2. plot
3. line

Определите результат счета следующего фрагмента программы (script Malaba) s=?

```
s=5;
while s>0
   s=s-1;
   if s<3.5
      s=s-2;
   end
end
```

1. s=-1
2. s=3
3. s=-2

Определите результат счета следующего фрагмента программы (script Malaba) s=?

```
s=5;
for i=1:6
   s=s-1;
   if (s<3)&(i>3)
      break
   end
end
```

1. s=1
2. s=2
3. s=-2

Определите результат счета следующего фрагмента программы (script Malaba) s=?

```
s=5;
for i=1:6
   s=s-1;
   if (s<3)|(i>3)
      break
   end
end
```

1. s=1
2. s=2
3. s=-2

Определите результат счета следующего фрагмента программы (script Malaba) s=?

```
s=5;
for i=1:6
   s=s-1;
   if (s<3)|(i>1)
      break
   end
end
```

1. s=2
2. s=1
3. s=3

A - матрица |2 3; 2 5|, B=A.^3. Тогда B(2,1)=:

1. 16
2. 27
3. 8
4. 9

A - матрица |2 3; 4 5|, B=A.^2. Тогда B(1,2)=:

1. 16
2. 9
3. 25

Чтобы в Matlab получить матрицу b -обратную матрице a:

1. b=inv(a)
2. b=a'
3. b=niv(a)
4. b=int(a)

A - матрица |2 3; 4 5|, B=A.^2. Тогда B(2,1)=:

1. 16
2. 28
3. 18

4. 9
Блок State-Space в Simulink предназначен для решения: 1. систем дифференциальных уравнений первого порядка 2. систем дифференциальных уравнений нормальной формы Коши 3. дифференциальных уравнений порядка выше первого 4. систем уравнений
С помощью какой функции в MatLab осуществляется построение двумерных графиков: 1. Plot 2. Mesh 3. Plot3
Как происходит поэлементное умножение двух матриц A и B: 1. A .* B 2. A*B 3. A*. B
Дана матрица A. Как вырезать элементы первой строки?: 1. A(1,:) 2. A(1,1) 3. A(:,1)
Какой знак разделяет строки при вводе матрицы в системе MatLab: 1. ; 2. : 3. ' 4. !
Модель системы – это 1. Представление объекта или системы в некоторой форме, отличной от формы их реального существования 2. Гипотетическая связь внешних факторов 3. Набор переменных, связанных эволюционными процессами
Непрерывные модели описываются: 1. Разностными уравнениями

2. Дифференциальными уравнениями 3. Бинарными уравнениями
При моделировании отдельных компонентов сложной системы мы сталкиваемся с: 1. Задачей верификации 2. Задачами анализа, управления, идентификации 3. Проблемой использования вычислительной техники
Формализация процесса или явления сводится к: 1. проведению анализа неопределенностей и ограничений, сопутствующих процессу. 2. оценке решения и оценке его правильности; 3. описанию процесса на языке математики; 4. формированию групп по выполнению отдельных частей проекта.
Какие из следующих задач, с которыми исследователь сталкивается при моделировании отдельных компонентов сложной системы, называются обратными? 1. задача анализа и задача идентификации; 2. задача управления и задача анализа; 3. задача идентификации и задача управления; 4. задача анализа и задача синтеза.
Укажите неверное утверждение: 1. сильная корреляция между переменными означает, что их изменения взаимосвязаны; 2. сильная корреляция не всегда доказывает наличие причинно-следственной связи между переменными; 3. наличие связи является доказательством причинно-следственной зависимости;

4. связанные переменные одновременно изменяются в одном и том же или противоположном направлении.
Структурная схема системы - это: 1. Графическое представление математической модели в виде соединения звеньев 2. Описание системы на языке программирования высокого уровня 3. Описание системы с использованием лингвистического подхода 4. Empty
Основные конфигурации соединения систем - это: 1. Прямое соединение 2. Тупое соединение 3. Параллельное, последовательное и соединение с обратной связью 4. Empty
Модель склада описывается следующим уравнением (Xk - запас на складе; Uk - объем заказа; Wk - объем спроса): 1. Xk = Uk - Wk 2. X k+1 = Xk - Wk + Uk 3. Uk = - X 2k + Wk 4. Empty
С чего начинается процедура исследования операций? 1. С составления плана разработки проекта. 2. С определения целей исследования. 3. С построения модели.
Какой документ регламентирует процесс исследования операций? 1. Календарный график (диаграмма Ганта)

2. Экономическое обоснование исследования 3. Персональный состав исполнителей
Статическая модель может быть описана: 1. линейным дифференциальным уравнением; 2. нелинейным дифференциальным уравнением высших порядков; 3. разностным уравнением; 4. алгебраическим уравнением.
Какие модели среди нижеприведенных являются наиболее общими и абстрактными? 1. натурные 2. аналоговые; 3. изобразительные 4. символические
Какие составляющие модели возникают в системе в результате воздействия внутренних причин? 1. экзогенные переменные; 2. эндогенные переменные; 3. функциональные зависимости; 4. параметры.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

7.1.Список источников и литературы

Основные учебники

1. Конюховский П. Математические методы исследования операций в экономике. Санкт-Петербург: Питер 2000, 208 стр.
2. Жданов С. А. Экономические модели и методы в управлении. М.: Дело и Сервис 1998, 176 стр.
3. Замков О.О., Черемных Ю.А., Толстопятенко А.В. Математические методы в экономике. М.: Дело и Сервис 1999, 365 стр.
4. Браверман Э.М. Математические модели планирования и управления в экономических системах. М.: Наука, 1976, 366 стр.

5. Янг С. Системное управление организацией. М.: Советское радио 1972, 450 стр.
6. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука. 1979.
7. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Исследование операций в экономике. Учебное пособие, ЮНИТИ, 407с.,1997.
8. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций.- М.: Мир, 1973
9. Исследование операций (в двух томах) /Под редакцией Дж. Моудера, С. Элмаграби.-М.: Мир, 1981.
10. Вагнер Г. Основы исследования операций (в трех томах). -М.: Мир, 1972
11. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи. Принципы. Методология. -М.: Наука, 1981.
12. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. -М.: Наука, 1981
13. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем. - М.: Мир, 1973
14. Кофман А., Анри-Лабогер А. Методы и модели исследования операций. -М.: Мир, 1987. - М.: Мир, 1975.

Дополнительная литература

1. Воронов А.А. Введение в динамику управляемых сложных управляемых систем. -М.: Наука. 1985.
2. Сингх М., Титли А. Системы: декомпозиция, оптимизация и управление. -М.: Машиностроение, 1987.
3. Бахвалов Н. С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987.
4. Fletcher R. Ptractical Methods of Optimization. - Wiley & Sonns, New-York, 1987.
5. Карманов В.Г. Математическое программирование. - М.: Наука, 1986.
6. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы: Наука, 1990.
7. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. - М.: Наука, 1978.
8. Растригин Л.А. Системы экстремального управления. - М.: Наука, 1974.
9. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. - М.: Мир, 1975.
10. Дьяконов Б.П. Справочник по применению системы PC MATLAB. -М.: Наука, 1993

7.2.Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимый для освоения дисциплины (модулей)

1. https://www.intuit.ru/search
2. https://www.twirpx.com/ Библиотека все для студента
3. https://uk.sagepub.com/en-gb/asi/home
4. https://uk.sagepub.com/en-gb/asi/sage-premier
5. https://www.nejm.org/
6. https://uk.sagepub.com/en-gb/asi/imeche
7. http://global.oup.com/?cc=kg
8. https://www.cambridge.org
9. https://www.intellectbooks.co.uk/journals/index/
10. http://iopscience.iop.org/journalList
11. https://royalsociety.org/journals/
12. https://www.elibrary.imf.org/?redirect=true
13. https://www.elgaronline.com/page/70/journals
14. http://www.dukejournals.org/
15. http://www.iprbookshop.ru/

16. http://kyrlibnet.kg/ru/
17. http://biblioteka.kg/

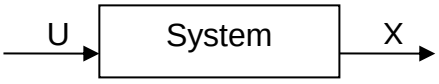
8. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся

8.1. Планы практических (семинарских) и лабораторных занятий. Методические указания по организации и проведению

Идентификация регрессионной модели экономической системы методом наименьших квадратов (МНК).

Постановка задачи.

Имеется система, преобразующая сигнал U в выходной сигнал X.



$$x = f(c,u),\ c \in R^m$$

Дана эмпирическая таблица значений U и соответствующих X.

Необходимо восстановить вектор c по эмпирическим данным с помощью метода наименьших квадратов (далее МНК).

Представим преобразование системы в виде $x = cf(u)$.

Тогда сумма квадратов отклонений для n эмпирических наблюдений выглядит следующим образом:

$$J = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - cf(u_i))^2 \to \min_c$$

Возьмем производную по вектору c и приравняем производную к нулю. Учтем, что производная по вектору – есть градиент, то есть вектор частных производных по каждой из переменных вектора.

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \sum_{i=1}^{n} 2(x_i - cf(u_i)) \cdot \frac{\partial(-cf(u_i))}{\partial c} = -2\sum_{i=1}^{n} [x_i - cf(u_i)] f(u_i)$$

Минимум функции суммы квадратов отклонений ищем из уравнения:

$$\sum_{i=1}^{n} [x_i - cf(u_i)] f(u_i) = 0$$

Так как $f(u)$ - это матрица размерностью $(m \times 1)$, мы не можем умножать $f(u)$ ее саму на себя. Поэтому преобразуем уравнение с помощью следующих свойств:

$c \cdot A = A \cdot c$, где c - это число, а A - это матрица.

$A^T B = B^T A$, где A и B – матрицы соответствующей размерности.

Тогда уравнение преобразуется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} f(u_i)[x_i - cf(u_i)] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(u_i)[x_i - f(u_i)^{\grave{O}} \tilde{n}^{\grave{O}}] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(u_i) x_i = \sum_{i=1}^{n} f(u_i) f(u_i)^{\grave{O}} \tilde{n}^{\grave{O}}$$

$$c^T = \sum_{i=1}^{n} [f(u_i) f(u_i)^{\grave{O}}]^{(-1)} f(u_i) x_i \qquad (1)$$

Таким образом, формула (1) является конечной формулой расчета коэффициентов функции преобразования. Стоит отметить, что при наличие шумовых воздействий на систему, коэффициенты, вычисленные по данной формуле будут максимально приближенными к реальным с величиной дисперсии прямо пропорциональной силе шумового воздействия.

Постановка задачи для лабораторной работы

Имея таблицу статистических данных u и x, а также зная вид функции f(u) и используя МНК восстановить коэффициенты - элементы матрицы $\grave{C}$.

*[1]. В случае неопределенности вида функции, зная только точечный разброс наблюдений, как на Ваш взгляд можно восстановить вид самой функции. Подготовить краткий алгоритм поиска вида функции.

Рекомендации по использованию некоторых функций в Matlab, краткое ихописание.

Для графической иллюстрации решения Вам понадобится избразить на одном и том же графике статистические данные – в виде точек и график полученной функции x(u) – в виде линии. Для изображения точек рекомендуется использовать уже известную Вам функцию построения графиков plot. Plot(x,u) – построит непрерывный график по точкам, где в качестве аргумента будет выступать u. Для отображения данных координат в виде точек необходимо ввести дополнительный параметр ‘.’. plot(x,u,’.’)

[1] Дополнительное сложное задание, не обязательное к выполнению всеми студентами

Возможны и другие типы маркировки, часть из них приведена ниже:

Символ	Тип маркера
.	Точки
o	Кружки
*	Звездочки
d	Пятиугольник
x	Кресты
s	Квадраты

Кроме того, существует большая вероятность, что точки могут совпасть с линией – и иллюстрация окажется ненаглядной. Поэтому необходимо использовать разные цвета графиков. Цвета вводятся аналогично параметрам маркировки и, как правило, обозначаются первой буквой английского названия цвета:

Символ	Цвет
r	Красный
g	Зеленый
b	Синий
c	Голубой
m	Фиолетовый
y	Желтый
b	Черный
w	Белый

Спецификаторы цвета и типа маркера заключаются в апострофы, внутри которых порядок их обозначения не важен. Таким образом, чтобы нарисовать точки по матрицам u и x в виде фиолетовых звездочек задаем выполнение оператор: plot(x,u,’m*’)

Задача прогнозирования спроса на товары длительного пользования с помощью логистической функции.

Вопрос прогнозирования спроса на товар является критичным для каждой торговой фирмы. На сегодняшний день большинство местных компаний решает вопросы о размерах закупок больше на интуитивном уровне, учитывая свой предыдущий опыт. Однако мы рассмотрим очень формальную модель, позволяющую спрогнозировать спрос на товары длительного пользования.

Задана математическая модель зависимости спроса на товары длительного пользования в виде дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy(t)}{dt} = K \cdot y(t)[A - y(t)], y(t_0) = y_0$$

где t –текущее время

y(t)- обеспеченность товаром

A- коэффициент «насыщенности товара»

K – коэффициент пропорциональности

Вопросы для самостоятельного объяснения:

- Какой физический смысл носит обеспеченность товаром, в чем она измеряется?
- Какой физический смысл у A и K?

Определим параметры данной модели (A и K).

Для этого необходимо привести задачу к подстановке в виде:

$$x = c^T \cdot f(u) \qquad (*)$$

Сначала разрешим в общем виде дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy(t)}{dt} = K \cdot y(t)[A - y(t)]$$

$$y = \frac{\mathrm{a}}{1 + c_1 \cdot a \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{k} \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{t}}} \qquad (1)$$

Однако уравнение (1) привести к виду (*) не представляется возможным, потому идентификация параметров с помощью изложенного ранее алгоритма МНК не представляется возможным. Тогда преобразуем дифференциальное уравнение в разностное и определим параметры A и K из него.

$$\frac{dy}{dt} = KAy(t) - Ky^2(t)$$

$$\frac{y_{t+1} - y_t}{\Delta t} = KAy_t - Ky_t^2$$

$$y_{t+1} = y_t + \Delta t KAy_t - \Delta t Ky_t^2 \qquad (2)$$

В терминах $x = c^T \cdot f(u)$ (2) можно представить в виде:

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ KA \\ -K \end{bmatrix}, \; f(y_t) = \begin{bmatrix} y_t \\ \Delta t \cdot y_t \\ \Delta t \cdot y_t^2 \end{bmatrix}$$

.

Пример:

Пусть фирма Сигма занимается поставкой жидкокристаллических мониторов в Кыргызстан. На сегодняшний день сотрудники фирмы собираются оформить заказ на поставку новой партии мониторов. Фирма заинтересована в высокой ликвидности своих оборотных средств, а потому хочет закупить товар, который бы был раскуплен полностью в ближайший месяц. Сотрудники аналитического отдела фирмы Сигма должны спрогнозировать спрос на мониторы на месяц вперед. Для прогнозирования спроса на мониторы аналитики будут использовать вышеуказанную модель обеспеченности товаром:

$$\frac{dy(t)}{dt} = K \cdot y(t)\left[A - y(t)\right],\ y(t_0) = y_0$$

Зная спрос на товары каждую неделю в течение всего периода работы фирмы (30 недель) аналитики определят соответствующую обеспеченность товаром и идентифицируют параметры K и A.

Номер недели	[illegible]	[illegible]
1	180	3680
2	190	3870
3	190	4060
4	200	4260
5	240	4500
6	240	4740
7	250	4990
8	270	5260
9	270	5530
10	280	5810
11	300	6110
12	300	6410
13	310	6720
14	320	7040
15	320	7360
16	340	7700
17	340	8040
18	350	8390
19	350	8740
20	370	9110
21	360	9470
22	370	9840

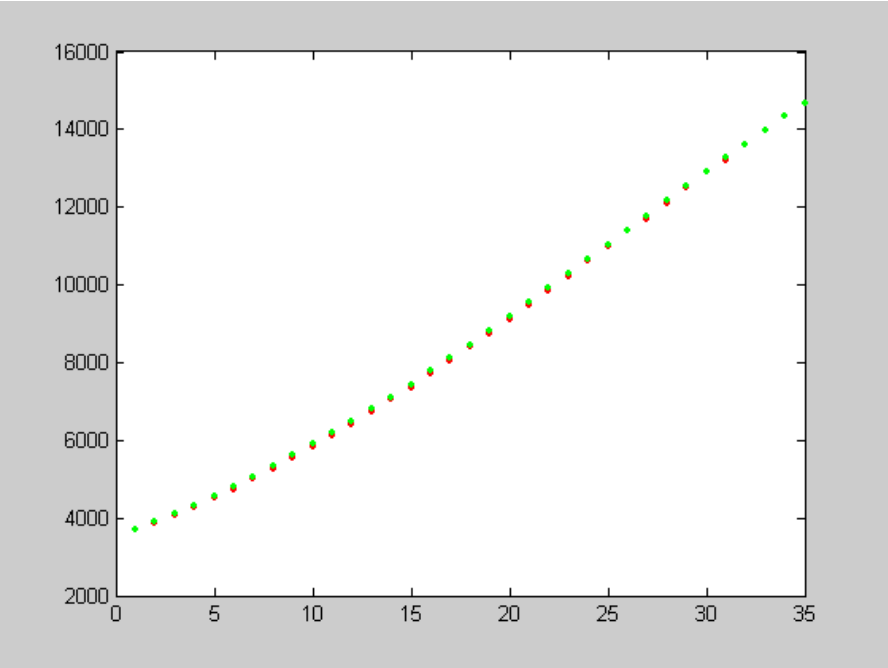
23	360	10200
24	400	10600
25	400	11000
26	400	11400
27	300	11700
28	400	12100
29	400	12500
30	400	12900
31	300	13200

Найдем теперь параметры А и К в соответствии с процедурой изложенной выше с помощью МНК.

Получаем: А =22178, К = $3.0522 \cdot 10^{-6}$.

Теперь, имея модель, основанную на предыдущих продажах, спрогнозируем обеспеченность на 4 недели вперед (на месяц):

y32=13623 y33=13979 y34=14329 y35=14672



Отсюда находим прогнозируемые продажи (как разницу между текущим и предыдущим уровнями насыщения):

423 356 350 343 (мониторов) соответственно по неделям.

Таким образом, размер закупок мониторов будет оценен аналитическим отделом в 1472 монитора (как сумма прогнозируемых продаж).

Постановка задачи для лабораторной работы

Задана статистика конъектуры спроса на конкретный товар длительного пользования в виде таблицы для дискретных интервалов времени.

Необходимо:

a. Используя статистику конъектуры спроса на конкретный товар длительного пользования и метод наименьших квадратов определить наилучшую оценку по МНК для параметров модели А и К. (необходимо четко описать все этапы сбора информации о конкретном товаре, а также все этапы анализа).
b. По восстановленной модели спрогнозировать спрос на товар длительного пользования на m тактов вперед.

*[2]. Объясните в отчете правомерность замены непрерывного дифференциального уравнения разностным уравнением. Объясните последствия данной замены.

Рекомендации по использованию некоторых функций в Matlab, краткое их описание.

Для программирования данного алгоритма, Вам могут понадобиться следующие функции:

F=Zeros(m,n)

Данная функция создает матрицу размерностью mxn, заполненную нулями. Таким образом, при заполнении элементов матрицы по какой-либо формуле, в программе уже будет костяк матрицы, а дальше работа будет вестись конкретно с каждым из элементов.

Пример: необходимо создать матрицу-строку, каждый из элементов которой будет квадратом соответствующего его порядковому номеру натурального числа. Число элементов матрицы – n.

```
n=4;
matrica=zeros(1,n);
for i=1:n
  matrica(1,i)=i^2;
end
```

Оптимизация поставок скоропортящихся продуктов.

[2] Дополнительное сложное задание, не обязательное к выполнению всеми студентами

На сегодняшний день сфера розничной торговли очень развита и, как правило, находится в руках частных предпринимателей. Часто розничный торговцы сталкиваются с проблемой выбора размера заказа, так как часто объект продажи является скоропортящимся продуктом, а значит, нераспроданный товар уже в течение очень короткого времени портится, а значит, ведет к убыткам. В этой связи, как правило, размер закупок определяется из интуитивного ожидания продаж, исходя из продаж прошлых периодов, часто с определенной долей осторожности, что может вести к недополученной прибыли, в результате неполного удовлетворения спроса. Рассмотрим формальную модель расчета оптимального заказа, которая носит вероятностный характер и основывается на опыте продаж предыдущих периодов.

Задана математическая модель зависимости «ожидаемой» средней прибыли от реализации скоропортящихся товаров.

$$J = \sum_{d=0}^{n} p_d [da - (n-d)b] + \sum_{d=n+1}^{\infty} p_d a ,$$

где:

n- число заказываемых в день единиц товара, целое число.

a – прибыль на каждую единицу проданного товара.

b – убыток на каждую единицу непроданного (возвращаемого) товара.

d – спрос, то есть количество единиц товара, которое можно продать при условии, что $n \geq d$.

p_d - вероятность того, что спрос будет равен d в случайно выбранный день.

J – чистая прибыль в день (показатель, тесно с ней коррелированный, близкий к математическому ожиданию чистой прибыли в день).

Основной сложностью использования данной модели является неопределенность вероятностей объема спроса и отсутствие точной методологии для расчета данных вероятностей. Одним из возможных вариантов заполнения значений вероятности является предположение о нормальности распределения. Тогда достаточно рассчитать математическое ожидание и дисперсию ряда и с помощью функции нормального распределения восстановить вероятности возникновения каждого из объемов спроса. Такой подход решает сразу несколько проблем – сумма вероятностей всегда будет равна 1, что требует модель, а границы остановки (или максимальное и минимальное значения спроса, для которых рассчитывать вероятность) автоматически определяется обнулением вероятности его возникновения. Однако сложность заключается в справедливости самой

гипотезы – то есть решение о возможности применения данного подхода решается в каждом конкретном случае по оценке степени нормальности выборки.

Альтернативным вариантом, не требующим нормальности распределения вероятностей, является расчет вероятностей по стандартной формуле $p = \frac{n}{N}$. Однако в этом случае возникают следующие проблемы, решение которых носит также вероятностный и весьма условный характер:

1. Существует высокая вероятность возникновения «дыр». Например, может возникнуть ситуация, когда вероятность продажи 5 штук будет равна 10%, 6 – 0%, а 7 – 15%. Это будет связано с тем, что в течение наблюдаемого периода спрос никогда не был равен 6, при этом принимать вероятность продажи 6 равной 0 нелогично, так как довольно часто встречались продажи на уровне 5 и 7.
2. Довольно сложно определить границы обнуления вероятностей. Дело в том, что факт отсутствия продаж выше или ниже какого-либо значения за наблюдаемый период вряд ли может говорить о нулевой вероятности возникновения продаж выше или ниже ранее встречающихся. Таким образом, трудно определить границы полного обнуления вероятности продаж.

Вопросы к самостоятельному изучению:

1. Каким образом можно проверить гипотезу о нормальном распределении ряда?
2. Как можно нивелировать недостатки расчета вероятностей вторым методом?
3. Как еще можно заполнить ряд вероятностей?
4. Назовите основные недостатки данной модели для практического применения?

Пример:

Формирование таблицы статистической вероятности определенного спроса.

Пусть мы работаем с некоторым магазином «Salat». Данный магазин занимается реализацией салатов, для упрощения рассмотрим закупку салата Оливье на реализацию. Изучим размеры закупок и реализации данного салата за последние 30 дней (срок годности салата -1 сутки).

110	77
100	78

100	86
100	90
110	92
110	94
100	95
100	95
100	95
100	96
100	97
100	97
100	97
100	98
105	98
110	98
100	99
105	99
100	99
100	100
120	101
110	104
110	105
110	105
110	106
110	108
110	110
120	115

За спрос в закупочный период будем принимать реализацию каждого из дней наблюдений, исключая дни полных продаж.

Расчет оптимального объема закупок.

Теперь проанализируем данную таблицу, преобразовав ее в таблицу вероятности спроса. Если исходить из статистической вероятности – получим неравномерное распределение ее по дням, с нулевыми значениями, встречающимися между не нулевыми значениями.

Поэтому будем исходить из предположения, что вероятности распределены по закону нормального распределения, исходя из средней величины -97.64286 и среднеквадратичным отклонением -8.340949.

	ɹ ʝ tɕ ts ʷ ls dʑ ts
ʉ tʃ tɕ t	dʑ ts tɕ dʒ tɕ ʘ fŋ tʃ tɕ ʝ

72	0.0424%
73	0.0609%

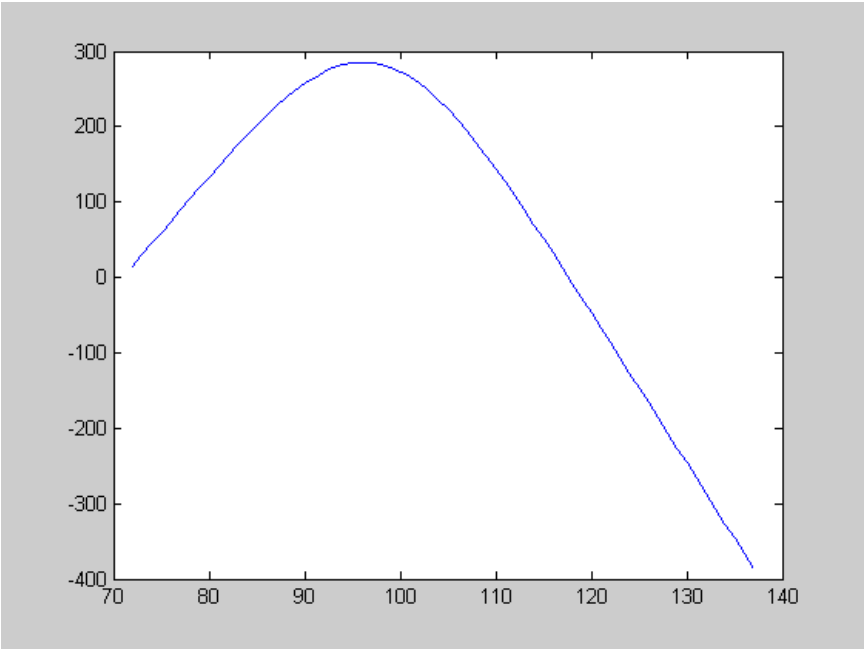
74	0.0861%
75	0.1201%
76	0.1651%
77	0.2237%
78	0.2988%
79	0.3935%
80	0.5107%
81	0.6534%
82	0.8240%
83	1.0244%
84	1.2553%
85	1.5163%
86	1.8055%
87	2.1191%
88	2.4517%
89	2.7960%
90	3.1432%
91	3.4831%
92	3.8046%
93	4.0965%
94	4.3479%
95	4.5488%
96	4.6911%
97	4.7688%
98	4.7786%
99	4.7200%
100	4.5957%
101	4.4108%
102	4.1729%
103	3.8915%
104	3.5773%
105	3.2415%

106	2.8954%
107	2.5493%
108	2.2125%
109	1.8928%
110	1.5962%
111	1.3269%
112	1.0872%
113	0.8782%
114	0.6992%
115	0.5487%
116	0.4245%
117	0.3237%
118	0.2433%
119	0.1803%
120	0.1317%
121	0.0948%
122	0.0673%
123	0.0471%
124	0.0325%
125	0.0221%
126	0.0148%
127	0.0098%
128	0.0064%
129	0.0041%
130	0.0026%
131	0.0016%
132	0.0010%
133	0.0006%
134	0.0004%
135	0.0002%
136	0.0001%
137	0.0001%

Теперь, используя имеющуюся математическую модель, рассчитаем оптимальный объем закупок Салата Оливье, (т.е. объем, при котором магазин «Salat» получит максимальную прибыль от их реализации). При этом известно, что с каждого проданного салата магазин имеет 15 сом чистого дохода, в то время как каждый непроданный салат приносит 25 сом убытка.

Составляем программу реализации модели в пакете MathLab.

График прибылей от объема покупок:



Таким образом:

Оптимальный заказ – 96 единиц салатов Оливье, при этом J= 285.6526

Постановка задачи для лабораторной работы

Используя модель оптимизации поставок скоропортящихся продуктов:

1. На примере конкретного предприятия составить таблицу вероятностей уровней продаж конкретного товара. Объяснить порядок формирования данной таблицы.
2. Необходимо, используя данную статистику реализации скоропортящихся товаров, найти такое целочисленной n, которое максимизирует J модели.
3. Дополнительно: придумать возможные варианты улучшения модели.

*[3]. Изложить в отчете все преимущества и недостатки расчета прогнозируемой вероятности спроса каждым из методов (используя нормальное распределение или расчет по формуле статистической вероятности).

Задача максимизации прибыли фирмы, выпускающей однотипную продукцию.

В современных рыночных условиях, когда большинство хозяйствующих субъектов находятся в частной собственности и носят коммерческий характер, прибыль называется главной конечной целью любого бизнеса. Однако непосредственно величина прибыли не

[3] Дополнительное сложное задание, не обязательное к выполнению всеми студентами

является управляемым параметром, а зависит от многих факторов и параметров. Объем выпуска продукции, при которой фирма будет иметь максимальный размер прибыли, зависит не только от конъектуры спроса на рынке, но и от характера изменения издержек фирмы с увеличением выпуска, а также от многих других факторов. Рассмотрим упрощенную модель оптимизации прибыли фирмы, выпускающей однотипную продукцию.

Прибыль фирмы – целевая функция модели – запишем как разницу доходов от реализации и затрат:

$$P(Y) = R(Y) - I(Y)$$

R(Y) - доход от реализации Y единиц продукции

$$R(Y) = \nu \cdot Y$$

ν -цена единицы продукции, которая определяется по формуле

$$\nu = (a - bY)$$

a и b – константы, параметры модели

I(Y) – издержки от производства Y единиц продукции

$$I(Y) = cY^2 + dY + e$$

c, d, e –константы, параметры модели

В соответствии с законом о налогообложении фирма платит налог с продаж t% и налог на прибыль w%.

Таким образом, целевая функция преобразуется в следующий вид:

$$P(Y) = [R(Y) \cdot (1-t) - I(Y)] \cdot (1-w)$$

Пример:

Пусть имеем данные о ценах и издержках на производство полиграфических материалов – календарей.

Объем выпуска (ед)	**Цена 1 продукции (сом)**
1	31.2
2	30.4
3	29.6
4	28.8
5	28
6	27.2
7	26.4
8	25.6
9	24.8
10	24
11	23.2
12	22.4
13	21.6
14	20.8
15	20
16	19.2
17	18.4
18	17.6

19	16.8
20	16
21	15.2
22	14.4
23	13.6
24	12.8
25	12
26	11.2
27	10.4
28	9.6
29	8.8
30	8
31	7.2
32	6.4
33	5.6
34	4.8
35	4
36	3.2
37	2.4
38	1.6
39	0.8
40	0

Объем выпуска (ед)	Издержки (сом)
1	23.06
2	26.24
3	29.54
4	32.96
5	36.5
6	40.16
7	43.94
8	47.84
9	51.86
10	56
11	60.26
12	64.64
13	69.14
14	73.76
15	78.5
16	83.36
17	88.34
18	93.44
19	98.66
20	104
21	109.46
22	115.04
23	120.74
24	126.56
25	132.5
26	138.56
27	144.74
28	151.04
29	157.46
30	164
31	170.66
32	177.44
33	184.34
34	191.36
35	198.5
36	205.76
37	213.14

38	220.64
39	228.26
40	236

В соответствии с законодательством Кыргызской Республики с предприятий взимается налог с розничных продаж – 4% (t=0,04), а также налог на прибыль - 20% (w=0,2).

Найдем объем выпуска при данных условиях, который бы максимизировал прибыль полиграфического издательства в случае производства календарей.

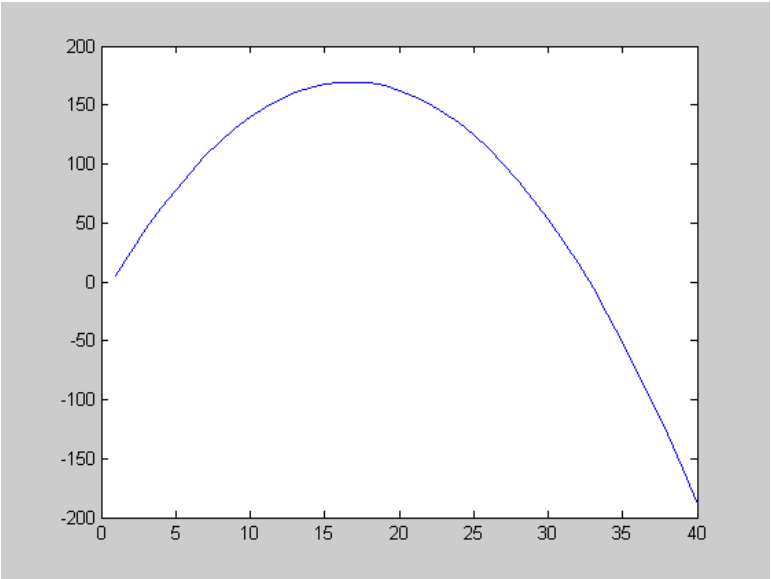
Сначала, с помощью метода наименьших квадратов определим все параметры-константы модели: a,b,c,d,e.

Θ	32
ɵ	0.8
fŋ	0.06
d	3
e	20

Далее, максимизируем полученную функцию по Y.

Таким образом, максимальная прибыль достигается при выпуске в 17 единиц, при этом прибыль составляет 169.56 сом.

График прибыли от выпуска:



Вопросы к самостоятельному изучению:

1. Каков экономический смысл каждого из параметров a,b,c,d,e?
2. Как изменение каждого из налогов будет влиять на размер оптимального выпуска?

3. Каковы на Ваш взгляд недостатки данной модели?

Постановка задачи для лабораторной работы:

В виде таблиц заданы статистические данные зависимости цены на единицу продукции и издержек на производства от объемов выпуска продукции. Используя вышеизложенную модель необходимо:

1. Определить наилучшую оценку по МНК для всех параметров модели.
2. С учетом восстановленной модели провести максимизацию прибыли по объему выпуска.
3. Проанализировать модель и возможности её улучшения. Определить каким образом ставки налогов могут влиять на показатели работы фирмы.

*[4]. Разработать и изложить в отчете усовершенствованную модель, нивелирующую найденные вами недостатки.

Рекомендации по использованию некоторых функций пакета Matlab:

Для нахождения максимального и минимального элементов матрицы, вместо традиционной цикличной схемы поэтапного сравнения элементов с текущим максимальным или минимальным соответственно пакет Mathlab предлагает использовать функции max и min. Формат их идентичен, поэтому весь их функционал рассмотрим на примере функции max.

Max(A) - возвращает максимальный элемент вектора A.

Например,

A=[1 2 3 4 7 5 3], max(A)=7 или A=[1; 2; 3; 4; 7; 5; 4], max(A)=7

Если A – матрица, то Max(A) возвращает вектор- строку, каждый из элементов которого является максимальным элементом соответствующего столбца матрицы A.

Например,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ max(A)=[3 2 7]}$$

[4] Дополнительное сложное задание, не обязательное к выполнению всеми студентами

Также функция max() может использоваться для выбора максимальных элементов из нескольких матриц в 1.

Max (A,B) –возвращает матрицу тех же размеров, что и A и B , при этом ее элементами являются максимальные из двух матриц.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix} \text{ тогда } \max(A,B)=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}.$$

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Минимальные требования к материально-техническому обеспечению дисциплины:

- Компьютерный класс
- проектор, экран
- колонки
- программное обеспечение NNT Matlab.

10. Глоссарий

Исследование операции — термин исследование операций характеризует применение математических количественных методов для обоснования решений.

Математическая модель — самый распространенный способ формально описать явление.

Методология исследования операций — порядок формальных действий для системного упорядочивания проведения этапов исследования операций.

Задача линейного программирования — задачи приводящие к ситуации, когда критерий оптимальности и ограничения линейны.

Задача нелинейного программирования — задачи приводящие к ситуации, когда либо критерий оптимальности нелинейный и либо одно из ограничений нелинейно.

Задача на безусловный экстремум — в постановке задачи есть только критерий оптимальности, ограничения на переменные оптимизации отсутствуют.

Задача на условный экстремум — в постановке задачи есть и критерий оптимальности и ограничения на переменные оптимизации.

Градиентный метод оптимизации — один из распространенных методов оптимизации, базирующийся на использовании градиента в итерационной оптимизационной процедуре.

Случайный метод поиска — итерационный метод оптимизации, базирующийся на использовании случайной стратегии поиска.

11. Приложения

нет

12.

Приложение 3

СОГЛАСОВАНО
Протокол заседания кафедры
№_____ от_____

УТВЕРЖДЕНО
Ректор УНПК «МУК»
_____
(название)
_____
(подпись, ф.и.о.)

ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ

в учебно-методический комплекс (модуле) дисциплины
_____
(название дисциплины)
по направлению подготовки (специальности)_____

на 20__/20__ учебный год

1. В _____ вносятся следующие изменения:
(элемент УМК)
1.1. ……..;
1.2. ……...;
…
1.9. …… .

2. В _____ вносятся следующие изменения:
(элемент УМК)
2.1. ……..;
2.2. ……...;
…
2.9. …… .

3. В _____ вносятся следующие изменения:
(элемент УМК)
3.1. ……..;
3.2. ……...;
…
3.9. …… .

Составитель подпись расшифровка подписи
дата