МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
НЕКОММЕРЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
УЧЕБНО-НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ КОМПЛЕКС
«МЕЖДУНАРОДНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ КЫРГЫЗСТАНА»

«СОГЛАСОВАНО»
Проректор по учебно-административной работе НОУ УНПК «МУК»,
д.и.н., доц. Мусаева Алина
«16» сентября 2020 г.

«УТВЕРЖДЕНО»
Ректор НОУ УНПК «МУК»,
к.т.н., доцент Сапченко Е.Ю.
«16» сентября 2020 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Название дисциплины: Математика

Название и код направления подготовки: 531000 «Филология»

Квалификация выпускника: Бакалавр

Форма обучения: Очная

Составитель: ст.преп. Эсенкулова А.К.

График проведения модулей
1 семестр

неделя	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
лекция	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
сем. зан.	1	1	1	1	1	1	1	М	1	1	1	1	1	1	1	М	1

«РАССМОТРЕНО»
На заседании кафедры
«Естественно-научные дисциплины»
НОУ УНПК «МУК»
Протокол № 2
от «02» 10 2020 г.
И.о.зав.кафедрой Касмалиева Дж.С.

«ОДОБРЕНО»
На заседании Учебно-методического объединения НОУ УНПК «МУК»
Протокол № 5
от «15» октября 2020 г.
Председатель Учебно-методического объединения
Матеева Т.В.

«СОГЛАСОВАНО»
Директор Научной библиотеки
НОУ УНПК «МУК»
Асанова Ж.Ш.

Бишкек 2020

ОГ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Аннотация 3
Учебно-методический комплекс дисциплины (модулей)
1. Пояснительная записка 4
1.1 . Миссия и Стратегия 4
1.2 . Цель и задачи дисциплины (модулей) 4
1.3 . Формируемые компетенции, а также перечень планируемых (ожидаемых) результатов обучения по дисциплине (модулю) (знания, умения владения), сформулированные в компетентностном формате 4
1.4 . Место дисциплины (модулей) в структуре основной образовательной программы 5
2. Структура дисциплины (модулей) 5
3. Содержание дисциплины (модулей) 6
4. Конспект лекций 7
5. Информационные и образовательные технологии 28
6.Фонд оценочных средств для текущего, рубежного и итогового контролей по итогам освоения дисциплины (модулей)
6.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения дисциплины 29
6.2. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности 29
6.3. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания 30
6.4. Контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности 31
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины
7.1.Список источников и литературы 32
7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимый для освоения дисциплины (модулей) 32
8. ***Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся***
8.1. Планы практических (семинарских) и лабораторных занятий. Методические указания по организации и проведению 33
8.2. Методические указания для обучающихся, по освоению дисциплины (модулей) 51
8.3. Методические рекомендации по подготовке письменных работ 53
8.4. Иные материалы 54
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модулей) 55
10. Глоссарий 55

Аннотация
Учебно-методического комплекса дисциплины
«Математика»
(наименование дисциплины (модуля)

Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика» составлен на основании ГОС ВПО КР 3-го поколения, утвержденного МОиН КР приказом № 1179/1 от «15» сентября 2015г. и учебным планом по направлению подготовки 531000 «Филология».

Материалы УМК предназначены для очной формы обучения бакалавров. Учебная дисциплина «Математика» является базовой частью математического и естественнонаучного цикла основной образовательной программы подготовки бакалавров, реализуется на 1 курсе (1 семестр).

Цель дисциплины состоит в формировании базовых знаний в области математики; в формировании понятий об элементах математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач профессиональной деятельности; в формировании представлений о разработке математических моделей для решения лингвистических задач; в формировании практических знаний и навыков математического исследования явлений и процессов, связанных с лингвистическими исследованиями; компетенций обеспечивающих профессиональное решение задач, связанных с использованием методов математического исследования прикладных вопросов.

Задачи дисциплины - сформировать представления о месте и роли математики в современном мире; сформировать представления о системах основных понятий, используемых для описания важнейших математических моделей и математических методов, раскрытие взаимосвязи этих понятий; сформировать навыки самостоятельной работы, организации исследовательской работы; изучить разделы математики, которые помогут в освоении специальных дисциплин и в профессиональной деятельности; научить использовать математические методы для успешного овладения специальностью; сформировать основные навыки в изучении способов сбора результатов наблюдений и их обработки для более глубокого изучения сущности процессов и явлений в профессиональной деятельности.

Объем учебной нагрузки при изучении данной дисциплины для студентов составляет 60 часов, в том числе: обязательной аудиторной учебной нагрузки – 34 часов; самостоятельной работы – 26 часов.

Основные разделы дисциплины:

Раздел 1. Линейная алгебра

Раздел 2. Линейная геометрия

Раздел 3. Математический анализ

Проводится 2 модуля и итоговый контроль для контроля знаний студентов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЕЙ)

1. Пояснительная записка

1.1. Миссия и стратегия

Миссией данной УМК является подготовка высококвалифицированных специалистов в области регионоведения и повышение качества профессиональной подготовки посредством углубленного изучения математических дисциплин.

Стратегической целью является совершенствование системы высшего образования за счет усиления интеграции учебного процесса и научных исследований, широкого внедрения в образование новых информационных технологий, развития системы многоуровневого профессионального образования. Развитие и совершенствование системы управления качеством образования.

1.2. Цель и задачи дисциплины (модулей) (Вытекают из миссии и стратегии)

Цель дисциплины: формирование у студентов представления о месте математики в единой культуре, о методах и возможностях современной математики; способствовать развитию логического мышления и умения оперировать с абстрактными объектами; познакомить с основами математического моделирования.

Задачи дисциплины:

- *дать общее представление о роли и месте математики в современной культуре;*
- *развить математическое мышление и математическую культуру;*
- *познакомить студентов с математическими методами и основами математического моделирования;*
- *сформировать у студентов необходимые практические навыки формирования количественных оценок при проведении исследований.*

1.3. Формируемые компетенции, а также перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю) (знания, умения владения), сформулированные в компетентностном формате.

Студент в результате освоения дисциплины должен обладать следующими компетенциями:

- *общенаучными (ОК)*

- способен использовать базовые положения математических наук при решении профессиональных задач (ОК-2);

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

1. Знать: об основных математических структурах и методах, о математическом моделировании, вероятности и статистике, математических моделях.

2. Уметь: ориентироваться в потоке информации, содержащей математические вычисления; пользоваться справочной литературой.

3. Владеть: основными методами математического анализа.

Результаты обучения могут быть представлены в виде таблицы

Коды комп.	***Содержание компетенций***	***Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине***
ОК-2	способен использовать базовые положения	*Знать*: об основных математических структурах и методах, о математическом моделировании,

	математических наук при решении профессиональных задач	математических моделях *Уметь*: решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе математических методов и моделировании *Владеть*: основными методами математического анализа

1.4. Место дисциплины (модулей) в структуре ООП ВПО

Дисциплина (модуль) «Математика» является частью математического и естественнонаучного цикла (блока) дисциплин учебного плана по направлению подготовки (специальности) 531000 «Филология».

Для освоения дисциплины (модулей) необходимы компетенции, сформированные в ходе изучения следующих дисциплин и прохождения практик: знания курса математики в объеме общеобразовательной средней школы; умения использовать основные математические понятия и методы при изучении прикладных задач.

В результате освоения дисциплины (модулей) формируются компетенции, необходимые для изучения следующих дисциплин и прохождения практик: математические методы и моделирование, методы оптимимальных решений.

2. Структура дисциплины (модулей)

Структура дисциплины (модулей) для очной формы обучения

Общая трудоемкость дисциплины составляет _2_ кредита, _60_ ч., в том числе аудиторная работа обучающихся с преподавателем_34_ ч., самостоятельная работа обучающихся _26_ ч.

№ п/п	***Раздел, Темы Дисциплины***	***Семестр***	***Неделя семестра***	***Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)***				***Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)***
				Лекции	***Сем. зан./ лаб.зан.***	***СРС***	***СРС иП***	
	1 семестр 1 модуль							
1.	Матрицы и их виды. Действия над матрицами.	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*		*Решение задач*
2.	Определители матриц и их свойства. Вычисление определителей.	*1*	*2*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Индивидуальные задания*
3.	Миноры и алгебраические дополнения. Обратная матрица и методы их вычисления	*1*	*3*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Устный опрос*
4.	Системы линейных алгебраических уравнений. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом	*1*	*4*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Решение задач*

5.	Методы решения системы линейных алгебраических уравнений формулами Крамера.	*1*	*5*	*1*	*1*	*1*		*Индивидуальные задания*
6.	Методы решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.	*1*	*6*	*1*	*1*	*1*		*Решение задач*
7.	Уравнение прямой на плоскости.	*1*	*7*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Индивидуальные задания*
8.	Кривые второго порядка	*1*	*8*	*1*	*1*	*1*		*Устный опрос*
	I семестр 2 модуль							
9.	Основные понятия теории множеств. Операции над множествами.	*1*	*9*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Решение задач*
10.	Отношения на множествах.	*1*	*10*	*1*	*1*	*1*		*Устный опрос*
11.	Числовые последовательности и их пределы	*1*	*11*	*1*	*1*	*1*		*Устный опрос*
12.	Понятие и предел функции и свойства пределов функций, замечательные пределы.	*1*	*12*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Решение задач*
13.	Понятие производной функции и производная сложной функции	*1*	*13*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Индивидуальные задания*
14.	Дифференциал функции и его применение в приближенных вычислениях.	*1*	*14*	*1*	*1*	*1*		*Устный опрос*
15.	Первообразная функция и неопределенный интеграл. Методы интегрирования	*1*	*15*	*1*	*1*	*2*	*1*	*Проектирование задач*
16.	Определенный интеграл. Применение определенного интеграла	*1*	*16*	*1*	*1*	*2*		*Индивидуальные задания*
17.	Обобщение пройденного материала	*1*	*17*	*1*	*1*			*Устный опрос*
	Всего часов:			***17***	***17***	***18***	***8***	

3. Содержание дисциплины (модулей)

№	***Наименование раздела, темы дисциплины***	***Краткое содержание***
1.	*Линейная алгебра:* Матрицы и действия над ними.	Виды матриц. Сложение, вычитание, умножение на число, транспонирование, возведение в степень матриц, умножение двух матриц
2.	*Линейная алгебра:* Вычисление определителей матриц. Обратная матрица	Вычисление определителей матриц второго порядка, третьего порядка, разложение определителя по элементам строки или столбца. Обратная матрица. Ранг матрицы.
3.	*Линейная алгебра:* Системы линейных алгебраических	Матричный метод, метод Крамера, метод Гаусса решения систем линейных

	уравнений. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений	алгебраических уравнений.
4.	*Математический анализ:* Основные понятия теории множеств. Операции над множествами. Отношения на множествах.	Множество. Понятие множества. Способы задания множества. Объединение, пересечение, сравнение, разность множеств. Декартовое произведение множеств. Мощность множества. Бинарное отношение на множествах. Композиция отношений.
5.	*Математический анализ:* Числовые последовательности и их пределы.	Числовые последовательности и операции над ними. Предел последовательности.
6.	*Математический анализ: П*онятие функции. Предел функций.	Понятие функции и способы задания функции. Область определения функции. Предел функции. Теоремы о пределах функции.
7.	*Математический анализ:* Производная и дифференциал функции.	Определение производной. Дифференциал функции. Производная сложных функций. Основные правила дифференциала.
8.	*Аналитическая геометрия:* Уравнение прямой на плоскости. Кривые второго порядка	Уравнение прямой на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом, общее уравнение прямой, каноническое уравнение прямой, уравнение прямой в отрезках. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола

4. Конспект лекций

Тема 1. Матрицы и действия над ними.

Определение матрицы. Матрицей называется прямоугольная таблица из чисел, содержащая некоторое количество m строк и некоторое количество n столбцов.

Основные понятия матрицы: Числа m и n называются порядками матрицы. В случае, если m=n, матрица называется **квадратной**, а число m=n — ее порядком.

В дальнейшем для записи матрицы будут применяться обозначение: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ Хотя иногда в литературе встречается обозначение: $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$ Впрочем, для краткого обозначения матрицы часто используется одна большая буква латинского алфавита, (например, A), либо символ ||aij||, а иногда и с разъяснением: A=||aij||=(aij) (i=1,2,…,m; j=1,2,…n)

Числа aij, входящие в состав данной матрицы, называются ее элементами. В записи aij первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j — номер столбца.

Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ -2y & -5 & 0 \end{pmatrix}$ это матрица порядка 2×3, ее элементы a11=1, a12=x, a13=3, a21=-2y, …

Итак, мы ввели определение матрицы. Рассмотрим виды матриц и дадим соответствующие к ним определения.

Виды матриц

Введем понятие матриц: квадратных, диагональных, единичных и нулевых.

Определение матрицы квадратной: **Квадратной матрицей** n-го порядка называется матрица размера n×n. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

В случае квадратной матрицывводятся понятие главной и побочной диагоналей.

Главной диагональю матрицы называется диагональ, идущая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний ее угол.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Побочной диагональю той же матрицы называется диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Понятие диагональной матрицы: **Диагональной** называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю.

$$\begin{pmatrix} 3x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Понятие единичной матрицы: **Единичной** (обозначается E иногда I) называется диагональная матрица с единицами на главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Понятие нулевой матрицы: **Нулевой** называется матрица, все элементы которой равны нулю.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тема 2. Вычисление определителей матриц. Обратная матрица

Понятия определителя

Определителем квадратной матрицы или просто определителем (детерминант) называется число, которое ставится в соответствие матрице и может быть вычислено по её элементам.

$$\Delta = \det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

• Квадратная матрица первого порядка состоит из одного элемента поэтому её определитель равен самому элементу $\Delta = |a_{11}| = a_{11}$

• Определитель второго порядка вычисляется по формуле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

• Определитель третьего порядка вычисляется по правилу треугольника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Определение минора

Дополнительным минором M_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы A называется определитель *(n-1)* -го порядка полученный из исходного вычеркиванием *i*-ой строки и *j*-ого столбца на пересечении которых данный элемент находится.

Алгебраическое дополнение (адъюнкт)

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Вычисление определителей

Теорема (без доказательств) о разложении определителя по элементам строки (столбца). Для каждой квадратной матрицы A порядка n имеет место формула

$$\Delta = \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \text{ Í ńëč } i = \overline{1,n};$$

$$\Delta = \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, \text{ Í ńëč } j = \overline{1,n}.$$

Пример:

$$|a_{11}| = a_{11},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = \langle A_{11} = (+)a_{22}; A_{12} = (-)a_{21} \rangle = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Свойства определителей

- При транспонировании величина определителя не меняется.
- Строки и столбцы определителя эквиваленты.
- Если в определители поменять местами какие-либо две строки (столбца) местами, то определитель меняет знак.
- Определитель с двумя одинаковыми столбцами (строками) равен 0.
- При умножении элементов какого-либо столбца (строки) на число а, определитель умножается на это число.
- Если все элементы какого-либо столбца (строки) равны 0 , то определитель равен 0.
- Если элементы двух строк (столбцов) пропорциональны, то определитель равен 0.
- Пусть каждый элемент какого-либо столбца (строки) определителя равен сумме двух слагаемых, тогда этот определитель равен сумме двух определителей, причём в первом их них соответствующий столбец (строка) состоит из первых слагаемых, а во втором - из вторых слагаемых.
- Определитель не изменится, если к элементам какого-либо столбца (строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца умноженного на одно и тоже число.
- Сумма произведений элементов какого-либо столбца определителя на алгебраического дополнения к элементам другого столбца равна 0.

Тема 3. Системы линейных алгебраических уравнений. Методы решения системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера. Метод Гаусса.

Задана система N линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с N неизвестными, коэффициентами при которых являются элементы матрицы $A(a_{ij})$, а свободными членами - числа $b_1, b_2, \ldots, b_N$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \ldots + a_{NN}x_N = b_N. \end{cases}$$

Первый индекс i возле коэффициентов a_{ij} указывает в каком уравнении находится коэффициент, а второй j - при котором из неизвестным он находится.
Если определитель матрицы A не равен нулю

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN} \end{vmatrix} \neq 0$$

то система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение.
Решением системы линейных алгебраических уравнений называется такая упорядоченная совокупность N чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$, которая при $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \ldots, x_N = \lambda_N$ превращает каждое из уравнений системы в правильную равенство.
Если правые части всех уравнений системы равны нулю, то систему уравнений называют однородной. В случае, когда некоторые из них отличны от нуля – неоднородной $b_j \neq 0, (j = 1, 2, \ldots, k)$.

ТЕОРЕМА КРАМЕРА. Если определитель Δ системы N линейных алгебраических уравнений с N неизвестными отличен от нуля $\Delta \neq 0$ то эта система имеет единственное решение, которое находится **по формулам Крамера:**

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_N = \frac{\Delta_N}{\Delta}.$$

$\Delta_j \left(j = 1, 2, \ldots, N \right)$ - определители, образованные с Δ заменой j -го столбца, столбцом из свободных членов.

Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$ отличен от нуля, то СЛАУ решений не имеет. Если же $\Delta_j = 0, \ \left(j = 1, 2, \ldots, N \right)$, то СЛАУ имеет множество решений. Рассмотрим примеры с применением метода Крамера.

Метод Гаусса заключается в **последовательном исключении переменных** и преобразовании системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

к треугольному виду

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1; \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2; \\ \qquad\qquad \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ \qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n, \ c_{kk} = 1, \left(k = 1, \ 2, \ \ldots, \ n \right). \end{cases}$$

Предположим, что в системе коэффициент $a_{11} \neq 0$. Если это условие не выполняется, то на первое место переносим уравнение, которое ее удовлетворяет. С помощью первого уравнения исключим x_1 из остальных уравнений.

Для этого делят первую строчку на a_{11}, обозначим

$$a_{1k}^1 = \frac{a_{1k}}{a_{11}}, \ \left(k = 0, 1, 2, \ldots, n \right).$$

Дальше второй строки вычитаем первую строку, умноженную на a_{21};от третьего первую строчку, умноженный на a_{31}; и так далее до последней строки. Получим таблицу коэффициентов:

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	1
a_{11}^1	a_{12}^1	$\ldots$	a_{1n}^1	b_1^1
0	a_{22}^1	$\ldots$	a_{2n}^1	b_2^1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
0	a_{n2}^1	$\ldots$	a_{nn}^1	b_n^1

Для неизвестных $x_2, \ldots, x_n$ имеем систему $n - 1$ уравнений. Выполняя, как и раньше, исключим x_2 из всех уравнений, начиная с третьего. Для этого сначала разделим вторую строчку на a_{22}^1.

Если коэффициент $a_{22}^1 = 0$, то переставим уравнения так, чтобы выполнялось условие $a_{22}^1 \neq 0.$. Обозначив

$$a_{2k}^2 = \frac{a_{2k}^1}{a_{22}^1}, \ \left(k = 2, \ \ldots, \ n \right), \ b_2^2 = \frac{b_2^1}{a_{22}^1},$$

от третьей строки вычтем вторую строчку, умноженный на a_{32}^1; ;

Продолжая процесс исключения неизвестных получим таблицу:

x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_{n-1}	x_n	1
a_{11}^1	a_{12}^1	a_{13}^1	$\dots$	$a_{1,n-1}^1$	a_{1n}^1	b_1^1
0	a_{22}^2	a_{23}^2	$\dots$	$a_{2,n-1}^2$	a_{2n}^2	b_2^2
0	0	a_{33}^3	$\dots$	$a_{3,n-1}^3$	a_{3n}^3	b_3^3
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
0	0	0	$\dots$	$a_{n-1,n-1}^{n-1}$	$a_{n-1,n}^{n-1}$	$b_{n-1,0}^{n-1}$
0	0	0	$\dots$	0	a_{nn}^n	b_{n0}^n

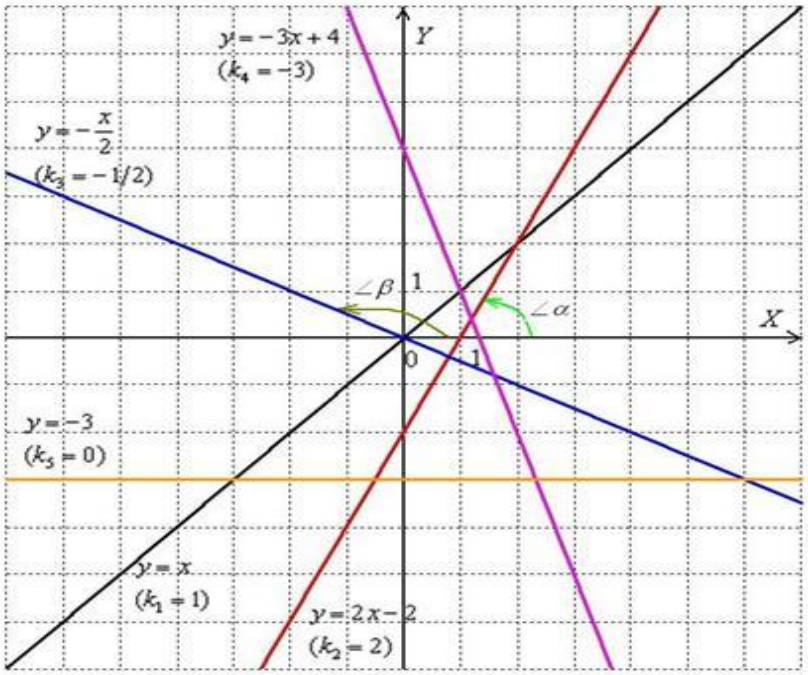
Таблица коэффициентов при неизвестных сводится к треугольному виду. Все главной диагонали элементы $a_{kk}^1 = 1$. Запишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}^1 x_1 + a_{12}^1 x_2 + a_{13}^1 x_3 + \ldots + a_{1,n-1}^1 x_{n-1} + a_{1,n}^1 x_n = b_1^1 \\ a_{22}^2 x_2 + a_{23}^2 x_3 + \ldots + a_{2,n-1}^2 x_{n-1} + a_{2,n}^2 x_n = b_2^2 \\ a_{33}^3 x_3 + \ldots + a_{3,n-1}^3 x_{n-1} + a_{3,n}^3 x_n = b_3^3 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n-1,n-1}^{n-1} x_{n-1} + a_{n-1,n}^{n-1} x_n = b_{n-1}^{n-1} \\ a_{n,n}^n x_{n-1} + a_{n-1,n}^{n-1} x_n = b_{n-1}^{n-1} \\ a_{n,n}^n x_n = b_n^n \end{cases}$$

Тема 7. Уравнение прямой на плоскости. Кривые второго порядка

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнения прямой $y=kx+b$ называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом *k***. Например, если прямая задана уравнением $y=2x-2$, то её угловой коэффициент: $k=2$. Рассмотрим геометрический смысл данного коэффициента и то, как его значение влияет на расположение прямой:



Угловой коэффициент характеризует степень наклона прямой к оси абсцисс. Возможны следующие случаи:

1) Если угловой коэффициент отрицателен: $k<0$, то линия, грубо говоря, идёт сверху вниз. Примеры – «синяя» и «малиновая» прямые на чертеже.

2) Если угловой коэффициент положителен: $k>0$, то линия идёт снизу-вверх. Примеры – «чёрная» и «красная» прямые на чертеже.

3) Если угловой коэффициент равен нулю: $k=0$, то уравнение $y=kx+b$ принимает вид $y=b$, и соответствующая прямая параллельна оси OX. Пример – «жёлтая» прямая.

В геометрических задачах часто фигурируют несколько прямых, поэтому их удобно как-нибудь обозначать.

Обозначения: прямые обозначаются маленькими латинскими буквами: *a, b, c, d, …, l, m, n, …* Популярный вариант – обозначение одной и той же буквой с натуральными подстрочными индексами. Например, те пять прямых, которые мы только что рассмотрели, можно обозначить через m_1, m_2, m_3, m_4, m_5.

Поскольку любая прямая однозначно определяется двумя точками, то её можно обозначать данными точками: *AB, CD, KL, PR* и т.д. Обозначение *AB* совершенно очевидно подразумевает, что точки *A* и *B* принадлежат прямой *AB*.

Если известна точка $M(x_0, y_0)$, принадлежащая некоторой прямой, и угловой коэффициент *k* этой прямой, то уравнение данной прямой выражается формулой:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Пример. Составить уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \frac{3}{2}$, если известно, что точка *A(3;-2)* принадлежит данной прямой.

Решение: Уравнение прямой составим по формуле $y - y_0 = k(x - x_0)$. В данном случае:

$$y - (-2) = \frac{3}{2} \cdot (x - 3)$$

$$y + 2 = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$$

Ответ: $y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$

Общее уравнение прямой

Общее уравнение прямой имеет вид: $Ax+By+c=0$, где *A, B, C* – некоторые числа. При этом коэффициенты *A, B одновременно* не равны нулю, так как уравнение теряет смысл.

Пример. Написать уравнение с угловым коэффициентом $y=2x-2$ общим уравнением прямой.

Решение: Сначала перенесём все слагаемые в левую часть:

$$y - 2x + 2 = 0$$

Слагаемое с «иксом» нужно поставить на первое место:

$$-2x + y + 2 = 0$$

Уравнение имеет вид $Ax+By+c=0$, но по правилам математического этикета коэффициент первого слагаемого (в данном случае *A*) должен быть положительным. Меняем знаки: $2x-y-2=0$

Ответ: $2x-y-2=0$

Направляющий вектор прямой

Вектор, который параллелен прямой, называется направляющим вектором данной прямой. Очевидно, что у любой прямой бесконечно много направляющих векторов, причём все они будут коллинеарны (сонаправлены).

Направляющий вектор обозначим следующим образом: $\bar{p}(p_1, p_2)$.

Но одного вектора недостаточно для построения прямой, вектор является свободным и не привязан к какой-либо точке плоскости. Поэтому дополнительно необходимо знать некоторую точку $\boldsymbol{M(x_0, y_0)}$, которая принадлежит прямой.

Если известна некоторая точка $\boldsymbol{M(x_0, y_0)}$, принадлежащая прямой, и направляющий вектор $\bar{p}(p_1, p_2)$ этой прямой $(p_1 \neq 0, p_2 \neq 0)$, то уравнение данной прямой можно составить по формуле:

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}$$

Иногда его называют *каноническим уравнением прямой*.

Пример. Составить уравнение прямой по точке *M(1; 2)* и направляющему вектору $\bar{p}(2, 1)$

Решение: Уравнение прямой составим по формуле $\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}$. В данном случае:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1}$$

С помощью свойств пропорции избавляемся от дробей:

$$1 \cdot (x-1) = 2 \cdot (y-2)$$

И приводим уравнение к общему виду:

$$x - 1 = 2y - 4$$

$$x - 2y + 3 = 0$$

Ответ: $x - 2y + 3 = 0$

Если прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, то вектор $\bar{p}(-B; A)$ является направляющим вектором данной прямой.

Примеры нахождения направляющих векторов прямых:

1) $5x + 7y - 1 = 0 \Rightarrow \quad \bar{p}(-7; 5)$

2) $2y + 3 = 0 \quad (0 \cdot x + 2y + 3 = 0) \Rightarrow \quad \bar{p}(-2; 0)$

3) $5x - 2 = 0 \quad (5x + 0 \cdot y - 2 = 0) \Rightarrow \quad \bar{p}(0; 5)$

Уравнение прямой проходящей через две точки

Если известны две точки $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$, то уравнение прямой, проходящей через данные точки, можно составить по формуле:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

<u>Пример.</u> Составить уравнение прямой по двум точкам $A\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right), B(-1; 7)$.

Решение: Используем формулу:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{-1-\frac{3}{2}}=\frac{y-\frac{7}{3}}{7-\frac{7}{3}}$$

Сделаем несколько преобразований и получаем ответ.

Ответ: $AB: 28x+15y-77=0$

1.1

1.2 **Уравнение прямой в отрезках**

Если в общем уравнении Ax + By + C = 0 C≠0, то, разделив на –C, получим: $-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1$ или $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где $a=-\frac{C}{A};\quad b=-\frac{C}{B}$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *a* является координатой точки пересечения прямой с осью Ox, а *b* – координатой точки пересечения с осью Oy.

Пример. Задано общее уравнение x – y + 1 = 0. Найти его в виде уравнение прямой в отрезках.

Решение:

C = 1, $-\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$, a = -1, b = 1.

Тема 8. Кривые второго порядка

Общее уравнение линии второго порядка имеет вид $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, где A, B, C, D, E, F – произвольные действительные числа, причём коэффициенты A, B, C не равны одновременно нулю.

Если $A=B=C=0$, то уравнение упрощается до $2Dx+2Ey+F=0$, и если коэффициенты D, E одновременно не равны нулю, то это в точности **общее уравнение «плоской» прямой**, которая представляет собой *линию первого порядка*.

Окружность.

Определение: Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от одной и той же точки.

Уравнение окружности имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

где *a* и *b* - координаты центра окружности, а *r* - радиус окружности. Если же центр окружности находится в начале координат, то ее уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Эллипс.

Определение: **Эллипсом** называется множество точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная.

Замечание. При совпадении точек F_1 и F_2 эллипс превращается в окружность.

Выведем уравнение эллипса, выбрав декартову систему координат так, чтобы ось *Ox* совпала с прямой F_1F_2, начало координат – с серединой отрезка F_1F_2. Пусть длина

этого отрезка равна $2c$, тогда в выбранной системе координат $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$. Пусть точка $M(x,\ y)$ лежит на эллипсе, сумма расстояний от нее до F_1 и F_2 равна $2a$. Тогда $r_1 + r_2 = 2a$, но $r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$, поэтому $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$.

Введя обозначение $b^2 = a^2-c^2$ и проведя несложные алгебраические преобразования, получим **каноническое уравнение эллипса**:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Определение: **Эксцентриситетом** эллипса называется величина $e=c/a$

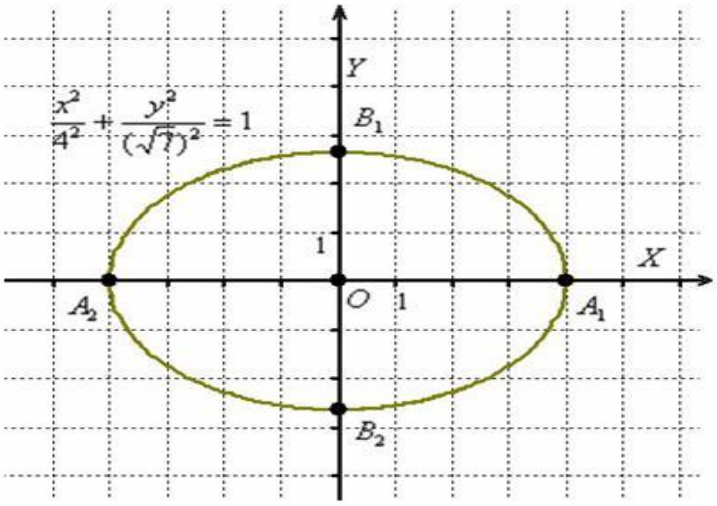
Определение: **Директрисой** D_i эллипса, отвечающей фокусу F_i, называется прямая, расположенная в одной полуплоскости с F_i относительно оси Oy перпендикулярно оси Ox на расстоянии a/e от начала координат.

Пример. Построить эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

Решение: сначала приведём уравнение к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{7})^2}=1$$

Это позволяет моментально определить **вершины эллипса**, которые находятся в точках $A_1(4;\ 0),\ A_2(-4;\ 0),\ B_1(0;\ \sqrt{7}),\ B_2(0;\ -\sqrt{7})$:



<u>Отрезок</u> A_1A_2 называют **большой осью** эллипса;

<u>отрезок</u> B_1B_2 – **малой осью**;

<u>число</u> $a = |OA_1| = |OA_1|$ называют **большой полуосью** эллипса;

<u>число</u> $b = |OB_1| = |OB_1|$ – **малой полуосью**.

в нашем примере: $a = 4, b = \sqrt{7}$.

Заданный каноническим уравнением эллипс симметричен относительно координатных осей, а также относительно начала координат.

Гипербола

Определение: **Гиперболой** называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная.

Выведем каноническое уравнение гиперболы по аналогии с выводом уравнения эллипса, пользуясь теми же обозначениями.

$|r_1 - r_2| = 2a$, откуда $\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$. Если обозначить $b^2=c^2-a^2$, отсюда можно получить

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ **- каноническое уравнение гиперболы**

Определение: **Эксцентриситетом** гиперболы называется величина $e = \frac{c}{a}$.

Определение: **Директрисой** D_i гиперболы, отвечающей фокусу F_i, называется прямая, расположенная в одной полуплоскости с F_i относительно оси Oy перпендикулярно оси Ox на расстоянии $\frac{a}{e}$ от начала координат.

Пример. Построить гиперболу, заданную уравнением $5x^2 - 4y^2 = 20$

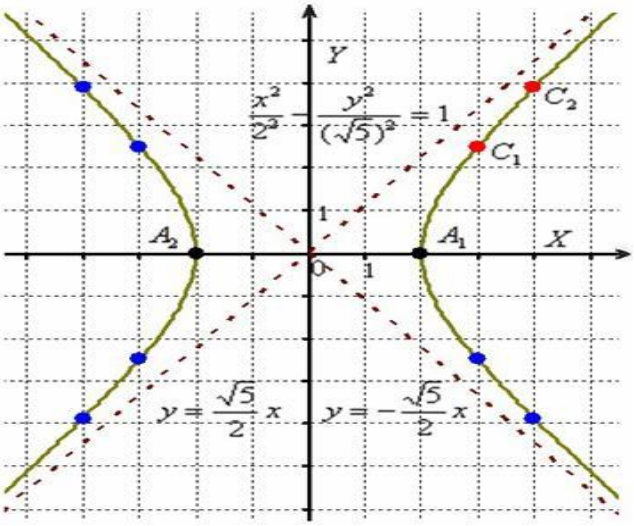
Решение: приведём данное уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Обе части исходного уравнения делим на 20:

$$\frac{5x^2-4y^2}{20} = \frac{20}{20}$$

$$\frac{5x^2}{20} - \frac{4y^2}{20} = 1$$

Сократим обе дроби, выделяем квадраты в знаменателях и получаем уравнение:

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$$



Парабола.

Определение: **Параболой** называется множество точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F этой плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой. Точка F называется **фокусом** параболы, а прямая – ее **директрисой**.

Для вывода уравнения параболы выберем декартову систему координат так, чтобы ее началом была середина перпендикуляра FD, опущенного из фокуса на директрису, а координатные оси располагались параллельно и перпендикулярно директрисе. Пусть длина

отрезка FD равна p. Тогда из равенства $r = d$ следует, что $\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\frac{p}{2}+x,$ поскольку $r=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}, d=\frac{p}{2}+x.$ Алгебраическими преобразованиями это уравнение можно привести к виду: $y^2 = 2px$, называемому **каноническим уравнением параболы**.

Величина p называется **параметром** параболы.

Пример. Построить параболу $y^2 = 4x$

Решение: вершина известна, найдём дополнительные точки. Уравнение $y=\sqrt{4x}=2\sqrt{x}$ определяет верхнюю дугу параболы, уравнение $y=-2\sqrt{x}$ – нижнюю дугу.

Из уравнения параболы находим $y=\pm 2\sqrt{x}$. Подставляя следующие значения x получаем:

$x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\pm 2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{2}\approx\pm 1{,}41;$

$x=1\Rightarrow y=\pm 2\cdot\sqrt{1}=\pm 2;$

$x=2\Rightarrow y=\pm 2\cdot\sqrt{2}\approx\pm 2{,}83;$

$x=4\Rightarrow y=\pm 2\cdot\sqrt{4}=\pm 4.$

Точка F называется **фокусом** параболы, прямая d – **директрисой** параболы. Константа «пэ» канонического уравнения $y^2=2px$ называется **фокальным параметром**, который равен расстоянию от фокуса до директрисы. В данном случае $p=2$. При этом фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, а директриса задаётся уравнением $x+\frac{p}{2}=0$.

Тема 9. Основные понятия теории множеств

Понятие множества является одним из основных понятий математики. Оно не имеет точного определения и, как правило, объясняется с помощью примеров.

Понятие множества — является одним из тех фундаментальных понятий математики, которым трудно дать точное определение, используя элементарные понятия. Поэтому ограничимся описательным объяснением понятия множества.

Множеством называется совокупность определенных вполне различаемых объектов, рассматриваемых как единое целое. Создатель теории множеств Георг Кантор давал следующее определение множества — «множество есть многое, мыслимое нами как целое».

Объекты, из которых состоит множество, называются ***элементами множества.***

ПРИМЕР

Множество домов на данной улице, множество натуральных чисел, множество студентов группы и т. д.

Множества обычно обозначают заглавными латинскими буквами A, B, C, D, X, Y…, элементы множества строчными латинскими буквами – a, b, c, d, x, y…

Для обозначения того, что объект x является элементом множества A, используют символику: $x\in A$ (читается: x принадлежит A), запись $x\notin A$ обозначает, что объект x не является элементом множества A (читается: x не принадлежит A).

Принято использовать следующие обозначения:

- $a \in X$ — «элемент a принадлежит множеству X»;
- $a \notin X$ — «элемент a не принадлежит множеству X»;
- $\forall$ — квантор произвольности, общности, обозначающий «любой», «какой бы не был», «для всех»;

- ∃ — квантор существования: ∃y ∈ B — «существует (найдется) элемент y из множества B»;
- ∃! — квантор существования и единственности: ∃!b ∈ C — «существует единственный элемент b из множества C»;
- : — «такой, что; обладающий свойством»;
- → — символ следствия, означает «влечет за собой»;
- ⇔ — квантор эквивалентности, равносильности — «тогда и только тогда».

Множества бывают **конечные** и **бесконечные**. Множества называются **конечным**, если число его элементов конечно, т.е. если существует натуральное число n, являющееся числом элементов множества. $A=\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$. Множество называется **бесконечным**, если оно содержит бесконечное число элементов. $B=\{b_1, b_2, b_3, ...\}$. Например, множество букв русского алфавита — конечное множество. Множество натуральных чисел — бесконечное множество.

Множество не содержащее ни одного элемента называется ***пустым*** (обозначается: Ø).

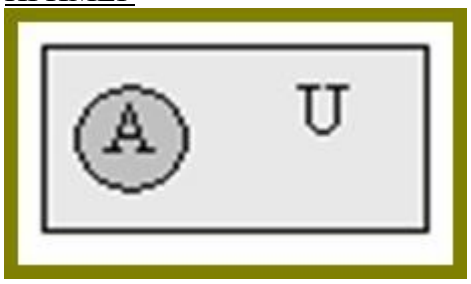
Множества из элементов которого составляем конкретное множество называется ***универсальным*** (обозначается: U).

ПРИМЕР

U – множество людей на земле, A – студенты группы Эп-305.

Множества можно изображать с помощью кругов, которые называются ***кругами Эйлера*** или ***диаграммами Венна***, универсальное множество принято обозначать прямоугольником.

ПРИМЕР



Операции над множествами

1) Сравнение множеств

Множество A называется ***подмножеством*** множества B, если все элементы множества A содержатся во множестве B.

$$A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$$

Два множества называются ***равными***, если они содержат одинаковые наборы элементов. $A=B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

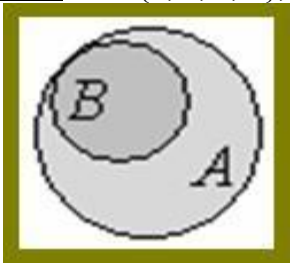
ТЕОРЕМА

Пустое множество Ø является подмножеством всех множеств.

Универсальное множество U содержит все множества.

Если $A \subset B$, то B надмножество A.

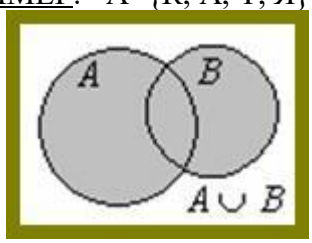
ПРИМЕР: A={0, 1, 2, 3}, B={0, 1}, $B \subset A$.



2) Объединением двух множеств называется множество, содержащее все элементы обоих множеств.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

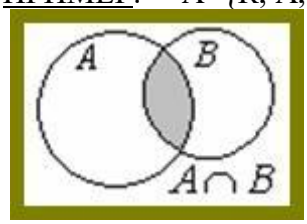
<u>ПРИМЕР</u>: А={К, А, Т, Я}, В={К, О, С, Т, Я}, $A \cup B = \{K, A, T, Я, O, C\}$.



3) Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из общих элементов обоих множеств.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

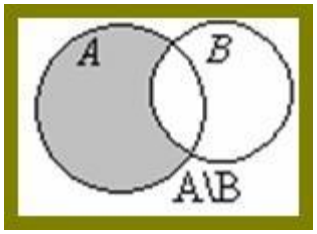
<u>ПРИМЕР</u>: А={К, А, Т, Я}, В={К, О, С, Т, Я}, $A \cap B$={К, Т, Я}.

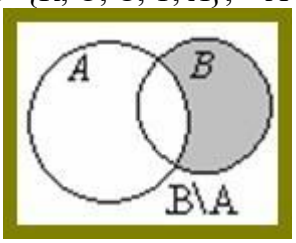


4) Разностью множеств А и В называется множество, состоящее из всех элементов множества А не содержащихся в В.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

<u>ПРИМЕР</u>: А={К, А, Т, Я}, В={К, О, С, Т, Я}, А \ В={А}, В \ А ={О, С}.

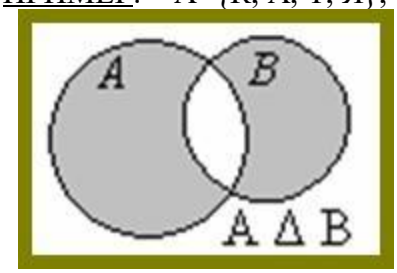




5) Симметрической разностью множеств А и В называется множество, состоящее из всех элементов множества А не содержащихся в В и всех элементов множества В не содержащихся в А.

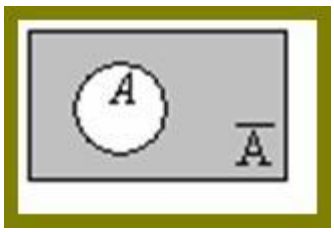
$$A \Delta B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

<u>ПРИМЕР</u>: А={К, А, Т, Я}, В={К, О, С, Т, Я}, А Δ В={А,О,С}.



6) Дополнением (дополнением до универсального множества) множества А называется множество, состоящее из всех элементов универсального множества не содержащихся в А.

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$



7) Прямым или декартовым произведением множеств *A* и *B*, называется множество всех упорядоченных пар (*a*, *b*), где первый элемент *a* из множества *A*, а второй элемент *b* из множества *B*.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

ПРИМЕР: $A = \{4,5,3\}$, $B = \{8,15,1,7\}$

$$A \times B = \{(4,8), (4,15), (4,1), (4,7), \{5,8\}, (5,15), (5,1), (5,7), (3,8), (3,15), (3,1), (3,7)\}$$

Степенью множества называется декартовое произведение множества *A* само на себя *n* раз.

$$A^n = \underbrace{A \times A \times A \times \ldots \times A}_{n}$$

ПРИМЕР

$A = \{3,1\}$, $A^2 = \{(3,3), (3,1), (1,3), (1,1)\}$.

Свойства операций над множествами

1) Коммутативность.

$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$

2) Ассоциативность.

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3) Дистрибутивность.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Мощность множества

Мощностью конечного множества называется число его элементов.

Мощность множества X обозначается: **| X |**

ПРИМЕР: X ={1,3,6}, | X | = 3

Тема 10. Отношения на множествах

Когда говорят о родстве двух человек, Маша и Саша, то подразумевают, что есть некая семья, к членам которой они относятся. Упорядоченная пара (Маша, Саша) отличается от других упорядоченных пар людей тем, что между Машей и Сашей есть некое родство (кузина, отец, и т. д.). В математике среди всех упорядоченных пар декартового произведения *A´B* двух множеств *A* и *B* тоже выделяются некоторые пары в связи с тем, что между их компонентами есть некоторые «родственные» отношения, которых нет у других.

В качестве примера рассмотрим множество *S* студентов какого-нибудь техникума и множество *D* изучаемых там дисциплин. В декартовом произведении *S´D*можно выделить большое подмножество упорядоченных пар (*s*, *d*), обладающих свойством: студент *s* изучает дисциплину *d*. Построенное подмножество отражает отношение «изучает», естественно возникающее между множествами студентов и дисциплин.

Для строгого математического описания любых связей между элементами двух множеств вводится понятие бинарного отношения, которое часто появляется как в математике, так и в информатике. Отношения между элементами нескольких множеств (*n*-арные отношения) применяются для описания простой системы управления базами данных.

Отношением (бинарным отношением, двуместным отношением) из множества A в множество B называется некоторое подмножество декартового произведения $A \times B$

Отношения в дальнейшем будем обозначать ρ $\rho \subset A \times B$ (читается ρ отношение из *A* в *B*)

Если $a \in A$, $b \in B$ и $\rho \in (a,b)$, то говорят, что *a* находится в отношении с *b*. Используется также запись $a \rho b$

<u>ПРИМЕР</u>: Если ρ отношение из A в A ($\rho \subset A^2$), то говорят ρ ***бинарное отношение на множестве A.***

<u>ПРИМЕР</u>:

$A = \{3,1\}$,

$A^2 = \{(3,3),(3,1),(1,3),(1,1)\}$,

$\rho = \{(3,3),(1,1)\}$.

n-арным отношением на множестве A, называется некоторое подмножество *n*-ой степени множества А.

<u>ПРИМЕР</u> $\rho \subset A^n$, ρ – *n*-арное отношение на множестве А.

<u>Виды бинарных отношений на множестве А</u>

1) Обратное отношение $\rho^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in \rho\}$.
2) Дополнение $\overline{\rho} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin \rho\}$.
3) Тождественные $I = \{(a,a) \mid a \in A\}$.
4) Универсальные $U = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in A\}$.

Композиция отношений

Пусть ρ_1 - отношение из *A* в *C*, $\rho_1 \subset A \times C$ и ρ_2 - отношение из *C* в *B*, $\rho_2 \subset C \times B$, тогда ***композицией*** отношений $\rho_1 \circ \rho_2$ называется отношение $\rho_1 \circ \rho_2 = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge (\exists c \in C \quad (a,c) \in \rho_1 \wedge (c,b) \in \rho_2)\}$.

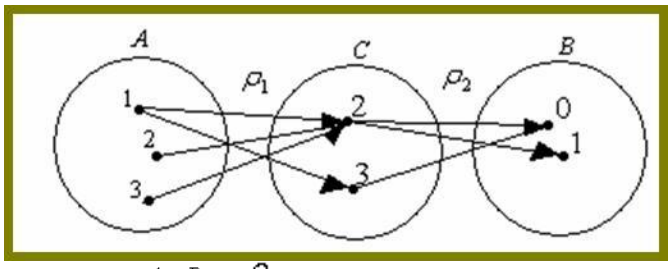
<u>ПРИМЕР</u>

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{0,1\}$, $C = \{2,3\}$.

$\rho_1 \subset A \times C$, $\rho_1 = \{(1,2),(1,3),(2,2),(3,2)\}$

$\rho_2 \subset C \times B$, $\rho_2 = \{(2,0),(2,1),(3,0)\}$

$\rho_1 \circ \rho_2 = \{(1,0),(2,0),(2,1),(3,0)\}$



Пусть $\rho \subset A \times B$ (ρ отношение из А в В). ***Ядром отношения*** ρ называется композиция отношения ρ и обратного для него отношения ρ^{-1}, т.е. $(\rho \circ \rho^{-1})$.

<u>ПРИМЕР</u>

Пусть А={0,1}, В={К, Л, О}, $\rho \subset A \times B$, ρ={(0,К),(0,Л),(1,К),(1,О)}. Найти ядро отношения ρ, т.е. $\rho \circ \rho^{-1}$.

Решение: Найдем обратное отношение ρ^{-1} ={(К,0),(Л,0),(К,1),(О,1)}.

Затем найдем композицию отношения ρ и обратного для него отношения ρ^{-1}: $\rho \circ \rho^{-1}$ = {(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)}

Тема 11. Числовые последовательности

Основные понятия и определения

Определение: Последовательностью называется функция, которая переводит множество натуральных чисел N в некоторое множество

$$X : \{x_n\} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1; x_2; ...; x_n; ...\}, x_i \in N$$

Элемент x_1 называется первым членом последовательности, x_2 - вторым, ... , x_n - n-ым или общим членом последовательности.

Пример

Задание. Для последовательности $x_n = \{-1; 2; 5; 8; -3; 0; ...\}$ определить, чему равен третий член x_3

Решение. Третьим элементом последовательности будет элемент, идущий третьим по счету, то есть для заданной последовательности имеем, что $x_3 = 5$

Ответ. $x_3 = 5$

Задание последовательности формулой ее общего члена

Обычно последовательность целесообразнее задавать формулой ее общего члена, которая позволяет найти любой член последовательности, зная его номер.

Пример

Задание. Найти формулу общего члена последовательности

$$x_n = \{6; 20; 56; 144; 352; ...\}$$

Решение. Запишем каждый член последовательности в следующем виде:

$$n = 1 : x_1 = 6 = 2 \cdot 3 = 2^1 \cdot 3 = 2^1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)$$
$$n = 2 : x_2 = 20 = 4 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5 = 2^2 \cdot (2 \cdot 2 + 1)$$
$$n = 3 : x_3 = 56 = 8 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7 = 2^3 \cdot (2 \cdot 3 + 1)$$

Как видим, члены последовательности представляют собой произведение степени двойки, умноженной на последовательные нечетные числа, причем два возводится в степень, которая равна номеру рассматриваемого элемента.

Таким образом, делаем вывод, что

$$x_n = 2^n \cdot (2n + 1)$$

Ответ. Формула общего члена: $x_n = 2^n \cdot (2n + 1)$

Пример

Задание. Найти 15 член последовательности, заданной формулой n-го члена:

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in N$$

Решение. Для того чтобы найти x_{15}, подставим в формулу общего члена значение $n = 15$. Получим:

$$x_{15} = \frac{(-1)^{15}}{15} = -\frac{1}{15}$$

Ответ. $$x_{15} = \frac{(-1)^{15}}{15} = -\frac{1}{15}$$

Пример

Задание. Проверить, являются ли числа $a = 6$ и $b = 1$ членами последовательности $$\{x_n\} = \left\{\frac{n^2 + 11}{n + 1}\right\}$$

Решение. Число $a = 6$ является членом последовательности $\{x_n\}, n \in N$, если существует такой номер $n_0 \in N$, что $x_{n_0} = a = 6$:

$$6 = x_{n_0} = \frac{n_0^2 + 11}{n_0 + 1} \Rightarrow \frac{n_0^2 + 11}{n_0 + 1} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_0^2 - 6n_0 + 5 = 0 \Rightarrow = \begin{cases} n_0 = 1 \\ n_0 = 5 \end{cases}$$

Таким образом, число $a = 6$ является первым и пятым членами заданной последовательности.

Проверим теперь, является ли число $b = 1$ членом указанной последовательности $\{x_n\} = \left\{ \frac{n^2 + 11}{n + 1} \right\}$. Рассуждая аналогично, как и для $a = 6$, получаем:

$$\frac{n_0^2 + 11}{n_0 + 1} = 1 \Rightarrow n_0^2 - n_0 + 10 = 0 \Rightarrow D = 1 - 40 = -39 < 0$$

Таким образом, уравнение $n_0^2 - n_0 + 10 = 0$ не имеет решение в натуральных числах, а значит, $b = 1$ не является членом последовательности $\{x_n\}$

Ответ. Число $a = 6$ является первым и пятым членами заданной последовательности, а $b = 1$ не является членом последовательности $\{x_n\} = \left\{ \frac{n^2 + 11}{n + 1} \right\}$

Предел последовательности

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, содержащий эту точку. δ — окрестностью точки x_0 $U_\delta(x_0)$ называется интервал длиной 2δ с центром в этой точке.

Определение предела последовательности: Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ такой, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n — a| < \varepsilon$

Число b называется пределом последовательности $\{x_n\}=x_1, x_2,..., x_n$ ($\lim \{x_n\} = b$; $n \to \infty$)

Последовательность $\{x_n\}$, имеющая конечный предел a, называется сходящейся. Последовательность, имеющая бесконечный предел или вообще не имеющая предела, называется расходящейся. Если у последовательности x_n **существует конечный предел** a, то она называется **сходящейся** (в частности, **бесконечно малой** при $a = 0$). В противном случае – **расходящейся**, при этом возможны два варианта: либо предела вовсе не существует, либо он бесконечен. В последнем случае последовательность называют **бесконечно большой**.

Пример: Последовательности $x_n = 2n, \quad y_n = 2n - 1$ являются *бесконечно большими*, поскольку их члены уверенным ходом продвигаются к «плюс бесконечности»:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} (2n) = \infty$$

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} (2n - 1) = \infty$$

Пример 2.

Написать первые четыре члена последовательности и найти её предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + 3 + ... + (2n - 1)}{3n^2}$$

Это пример для самостоятельного решения. Для устранения неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$ в числителе потребуется применить формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, где a_1 – первый, а a_n – энный член прогрессии.

Поскольку в пределах последовательностей «эн» всегда стремится к «плюс бесконечности», то неудивительно, что неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ – одна из самых популярных.

Тема 12. Функция и ее предел. Понятие функции. Способы задания функции

Функцией называется закон, по которому числу x из заданного множества X, поставлено в соответствие только одно число y, пишут $y = f(x)$, при этом x называют аргументом функции, y называют значением функции.

Существуют разные способы задания функций.

1. Аналитический способ.

Аналитический способ - это наиболее часто встречающийся способ задания функции. Заключается он в том, что функция задается формулой, устанавливающей, какие операции нужно произвести над x, чтобы найти y. Например $y = x^2 - 2$, $y = 3\ln x$, $y = \sin 2x$. Рассмотрим первый пример - $y = x^2 - 2$. Здесь значению x = 1 соответствует $y = 1^2 - 2 = -1$, значению x = 3 соответствует $y = 3^2 - 2 = 7$ и т. д. Функция может быть задана на разных частях множества X разными функциями.

Например:

$$y = \begin{cases} 3x, x \le 0, \\ 1, x > 0. \end{cases}$$

Во всех ранее приведенных примерах аналитического способа задания, функция была задана явно. То есть, справа стояла переменная y, а слева формула от переменной x. Однако, при аналитическом способе задания, функция может быть задана и неявно.

Например $y \cdot x + x + 1 = 0$, $\sin y + \cos x = 0.5$. Здесь, если мы задаем переменной x значение, то, чтобы найти значение переменной y (значение функции), мы должны решить уравнение. Например, для первой заданной функции при x = 3, будем решать уравнение: $y \cdot 3 + 3 + 1 = 0$, $y \cdot 3 + 4 = 0$, $y \cdot 3 = -4$, $y = -4/3$. То есть, значение функции при x = 3 равно -4/3.

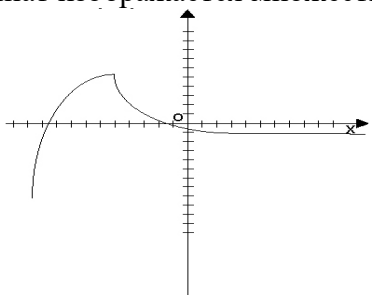
При аналитическом способе задания, функция может быть задана параметрически - это, когда x и y выражены через некоторый параметр t. Например,

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2. \end{cases}$$

Здесь при t = 2, x = 2, y = 4. То есть, значение функции при x = 2 равно 4.

2. Графический способ.

При графическом способе вводится прямоугольная система координат и в этой системе координат изображается множество точек с координатами (x,y). При этом $y = f(x)$. Пример:



3. Словесный способ.

Функция задается с помощью словесной формулировки. Классический пример – функция Дирихле. «Функция равна 1, если x – рациональное число; функция равна 0, если x – иррациональное число».

4. Табличный способ.

Табличный способ наиболее удобен, когда множество X конечно. При этом способе составляется таблица, в которой каждому элементу из множества X, ставится в соответствие число Y.

Пример:

X	3	5.1	10	12.5	13	20
Y	9	23	90	110	112	300

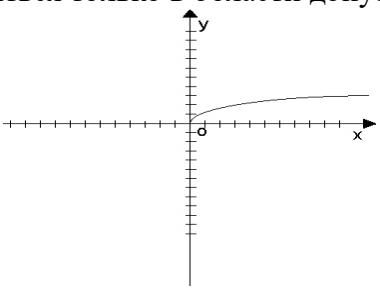
Табличный способ задания функции очень удобен при обработке результатов исследований. Например, при выявлении зависимости между уровнем загрязнения окружающей среды и количеству людей, заболевших раком.

Область определения

Областью определения функции $y = f(x)$ называется множество тех значений x, при которых функция определена. Иными словами, это те значения x, при которых функция «бывает». Иногда область определения задается непосредственно уже при задании функции. Например: $y = 3$ при $1 \le x \le 5$. Здесь областью определения (ОДЗ) является промежуток [1;5]. При других значениях x функция не определена. Однако, не всегда ОДЗ задана так непосредственно.

Чаще всего (для функций заданных аналитически), ОДЗ находят исходя из того, возможно ли при тех или иных значениях x произвести все операции, которые указаны в формуле.

Пример: ОДЗ функции $y = \sqrt{x}$ - промежуток [0;?). При всех других значениях x функция не определена (функции «не бывает»). Например, не существует действительного значения выражения $\sqrt{-2}$. При графическом изображении этой функции график будет находиться только в области допустимых значений, и ни на точку не выйдет за эти пределы.



При табличном способе задания функции областью допустимых значений являются только те значения x, которые заданы в таблице.

Например: Областью определения функции, заданной табличным способом

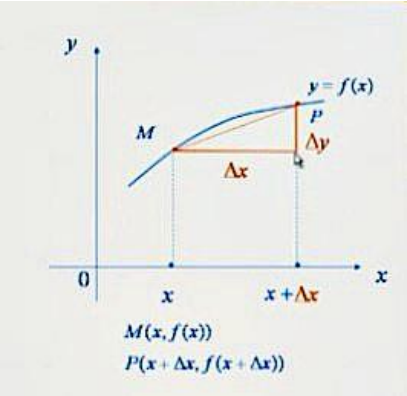
X	3	5.1	10	12.5	13	20
Y	9	23	90	110	112	300

является множество ОДЗ = {3;5.1;10;12.5;13;20}

Тема 13-14. Производная и дифференциал функции.

Определение производной

Пусть задана функция f(x) на интервале (a,b). Зафиксируем точку x внутри (a,b) и придадим x приращение Δx, MP секущая, приращение функции Δy = f(x+Δx)-f(x). Рассмотрим отношение



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ это тангенс угла наклона секущей МР, он зависит от Δx.

Определение. Производной называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента , когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

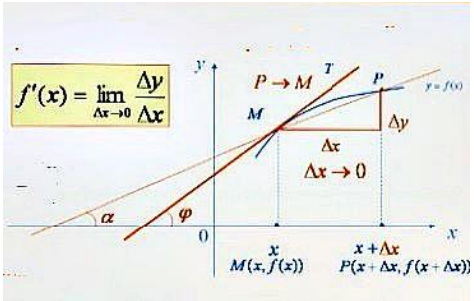
Существует несколько способов обозначения производной, самые важные это $f'(x)$ и y'_x.

Пример нахождения $f'(x)$, используя определение:

$$f(x) = x^2, \quad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\cdot\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x; \quad f'(x) = (x^2)' = 2x$$

Геометрический смысл производной



По определению $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ устремим точку М к точке Р , это эквивалентно стремлению $\Delta x \to 0$.

Предельное положение секущей МР это касательная к кривой в точке М , ее угловой коэффициент равен $k = tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Следовательно, <u>производная</u> в точке x равна тангенсу угла наклона касательной в этой точке.

Уравнение касательной в точке x_0 имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0),\ y_0 = f(x_0)$, т.к. $k = f'(x)$, то уравнение касательной примет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Найдем уравнение нормали, перпендикулярной данной касательной и проходящей через точку x_0. Из условия перпендикулярности прямых $k_1 \cdot k_2 = -1$ угловой коэффициент нормали равен $-\frac{1}{f'(x_0)}$, а уравнение нормали в точке x_0 примет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

5. *Информационные и образовательные технологии*

№ п/п	Наименование раздела	Виды учебной работы	Формируемые компетенции (указывается код компетенции)	Информационные и образовательные технологии
1	2	3	4	5
1.	Линейная алгебра	Лекция 1-6. Семинар 1-6. Самостоятельная работа	ОК-2 ОК-2 ОК-2	Вводная лекция с использованием презентаций. Решение задач в on-line режиме на интернет-ресурсах. Подготовка к занятию с использованием электронного курса лекций
2.	Аналитическая геометрия	Лекция 7-8. Семинар 7-8. Самостоятельная работа	ОК-2 ОК-2 ОК-2	Лекция-визуализация с применением слайд-проектора Индивидуальное решение задач в on-line режиме на интернет-ресурсах . Консультирование и проверка домашних заданий.
3.	Математический анализ	Лекция 9-17. Семинар 9-17. Самостоятельная работа	ОК-2 ОК-2 ОК-2	Вводная лекция с использованием презентаций. Решение задач в on-line режиме на интернет-ресурсах. Подготовка к занятию с использованием электронного курса лекций

6.Фонд оценочных средств для текущего, рубежного и итогового контролей по итогам освоения дисциплины (модулей)

6.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения дисциплины

№ п/п	Контролируемые разделы дисциплины (модулей)	Код контролируемой компетенции (компетенций)	Наименование оценочного средства
1.	Линейная алгебра	ОК-2	Устный опрос Контрольная работа Индивидуальные задания.
2.	Математический анализ	ОК-2	Устный опрос Контрольная работа Индивидуальные задания.
3.	Линейная геометрия	ОК-2	Устный опрос Контрольная работа Индивидуальные задания

			Реферат, эссе.

6.2. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Текущий контроль *осуществляется в виде опроса, участие в дискуссии на семинаре, выполнение самостоятельной работы и других видов работ, указанных в УМК, а также посещаемости студентов занятий - оценивается до 80 баллов.*

Рубежный контроль *(сдача модулей) проводится преподавателем и представляет собой письменный контроль по теоретическому и практическому материалу. Контрольные вопросы рубежного контроля включают полный объём материала части дисциплины (модулей), позволяющий оценить знания, обучающихся по изученному материалу и соответствовать УМК дисциплины, которое оценивается до 20 баллов.*

Итоговый контроль *(экзамен) знаний принимается по экзаменационным билетам, включающий теоретические вопросы и практическое задание, и оценивается до 20 баллов.*

Форма контроля	*Срок отчетности*	*Макс. количество баллов*	
		За одну работу	*Всего*
Текущий контроль: *- опрос* *- решение задач по пройденным темам* *- посещаемость*	 *1, 2, 3, 4 недели* *3, 4, 5, 6, 7 недели* *1,2,3,4,5,6,7,8 недель*	 *10 баллов* *6 баллов* *0,2*	 *До 40 баллов* *До 30 баллов* *10 баллов*
Рубежный контроль: *(сдача модуля)*	*8 неделя*	*100%×0,2=20 баллов*	
Итого за I модуль			*До 100 баллов*

Форма контроля	*Срок отчетности*	*Макс. количество баллов*	
		За одну работу	*Всего*
Текущий контроль: *- опрос* *- решение задач по пройденным темам* *- посещаемость*	 *9, 10, 11, 12 недели* *13, 14, 15, 16, 17 недели* *9,10,11,12,13,14,15,16, 17 недели*	 *10 баллов* *6 баллов* *0,2*	 *До 40 баллов* *До 30 баллов* *10 баллов*
Рубежный контроль: *(сдача модуля)*	*16 неделя*	*100%×0,2=20 баллов*	
Итого за II модуль			*До 100 баллов*
Итоговый контроль *(экзамен)*	*Сессия*	*ИК = Бср × 0,8+Бэкз × 0,2*	

Выставляются баллы по результатам балльной системы в семестре экзаменационную оценку без сдачи экзамена, набравшим суммарное количество баллов, достаточное для выставления оценки от 55 и выше баллов – автоматически (при согласии студента).

Полученный совокупный результат (максимум 100 баллов) конвертируется в традиционную шкалу:

Рейтинговая оценка (баллов)	Оценка экзамена
От 0 - до 54	неудовлетворительно
от 55 - до 69 включительно	удовлетворительно
от 70 – до 84 включительно	хорошо
от 85 – до 100	отлично

6.3. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Текущий контроль (0 - 80 баллов)

При оценивании посещаемости, опроса и решение задач на практике учитываются:

- посещаемость (10 баллов)

- степень раскрытия содержания материала (20 баллов);

- изложение материала (грамотность речи, точность использования терминологии и символики, логическая последовательность изложения материала (20 баллов);

- знание теории изученных вопросов, сформированность и устойчивость используемых при решении задач умений и навыков (30 баллов).

Рубежный контроль (0 – 20 баллов)

Рубежный контроль – проверка полноты знаний, умений и навыков по материалу модуля в целом. Рубежный контроль осуществляется два раза в семестр на учебных занятиях согласно утвержденному графику проведения рубежного контроля. Рубежный контроль проводится в виде письменной работы и оценивается до 20 баллов.

При оценивании контрольной работы учитывается:

– студент безошибочно ответил на все вопросы, представленные в билете, а также найти метод решения поставленной задачи и решить задачу безошибочно – 18-20 баллов.

– студент должен безошибочно ответить на вопросы, представленные в билете, но при решении задачи допущены незначительные ошибки – 15-17 баллов.

– студент с ошибками ответил на вопросы, представленные в билете, при решении задачи допущены незначительные ошибки – 10-14 баллов.

– студент с ошибками ответил на вопросы, представленные в билете, при решении задачи допущены значительные ошибки – 5-9 баллов.

– студент продемонстрировал слабые знания при ответе на вопросы, сформулированные в билете, неправильно решил поставленную задачу - 1-4 баллов.

– студент не ответил ни на один вопрос из билета и не решил данную задачу 0 баллов.

- полнота выполненной работы (задание выполнено не полностью и/или допущены две и более ошибки или три и более неточности) – 1-10 баллов;

- обоснованность содержания и выводов работы (задание выполнено полностью, но обоснование содержания и выводов недостаточны, но рассуждения верны) – 1-15 баллов;

- работа выполнена полностью, в рассуждениях и обосновании нет пробелов или ошибок, возможна одна неточность – 1-20 баллов.

Итоговый контроль (экзаменационная сессия) - ИК = Бср × 0,8+Бэкз × 0,2

При проведении итогового контроля обучающийся должен ответить на 3 вопроса (1 вопрос теоретического характера и два вопроса практического характера).

При оценивании ответа на вопрос теоретического характера учитывается:

- теоретическое содержание не освоено, знание материала носит фрагментарный характер, наличие грубых ошибок в ответе (1-2 балла);

- теоретическое содержание освоено частично, допущено не более двух-трех недочетов (3-6 баллов);

- теоретическое содержание освоено почти полностью, допущено не более одного-двух недочетов, но обучающийся смог бы их исправить самостоятельно (6-8 баллов);
- теоретическое содержание освоено полностью, ответ построен по собственному плану (9-10 баллов).

При оценивании ответа на вопрос практического характера учитывается:
- ответ содержит менее 20% правильного решения (1-6 балла);
- ответ содержит 21-89 % правильного решения (6-15 баллов);
- ответ содержит 90% и более правильного решения (15-20 баллов).

6.4. Контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Раздел УМК включает образцы оценочных средств, примерные перечни вопросов и заданий в соответствии со структурой дисциплины и системой контроля.

Перечень вопросов:

1. Что понимают под множеством?
2. Как называют объекты, из которых образовано множество?
3. Какое множество называют пустым?
4. Какие множества называют конечными и бесконечными?
5. В каком случае считают, что множество задано?
6. Укажите способы задания множеств.
7. В каком случае множество А является подмножеством множества В?
8. Какие подмножества называют собственными и несобственными?
9. Какие множества называют равными?
10. Сформулируйте свойство равенства множеств.
11. Какое множество называют пересечением, объединением, разностью множеств, дополнением одного множества до другого, дополнением множества до универсального?
12. Дайте определение декартова произведения множеств.
13. Перечислите способы задания декартова произведения множест
14. Дайте определение бинарного отношения на множестве X.
15. Как записать утверждение о том, что элементы x и y находятся в отношении R?
16. Перечислите способы задания отношений.
17. Дайте определение числовой последовательности.
18. Перечислите способы задания последовательностей.
19. Какие последовательности называют ограниченными?
20. Сформулируйте определения предела функции в точке, предела функции в бесконечности, предела последовательности.
21. Какая функция называется бесконечно малой и каковы ее основные свойства?
22. Какая функция называется бесконечно большой и какова ее связь с бесконечно малой?
23. Сформулируйте основные теоремы о пределах функций.
24. Как раскрываются неопределенности видов $\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [\infty - \infty], [0\,\infty]$.
25. Сформулируйте первый замечательный предел и его следствия.
26. Сформулируйте второй замечательный предел.
27. Сформулируйте определение производной.
28. Каков ее геометрический смысл?
29. Сформулируйте основные правила дифференцирования функций.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

7.1.Список источников и литературы

- источники (основные, дополнительные);
- литература (основная, дополнительная);

Основная литература:

1. Грес, П.В. Математика для бакалавров. Универсальный курс для студентов гуманитарных направлений: Учебное пособие / П.В. Грес. - М.: Логос, 2015. - 288 с.
2. Дорофеева, А.В. Высшая математика для гуманитарных направлений: Учебник для бакалавров / А.В. Дорофеева. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 400 с.
3. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.

Дополнительная литература:

1. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с.
3. Высшая математика: учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. – Москва: Флинта: МПСИ, 2010. – 359 с.

- *справочные и информационные издания.*

1. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимый для освоения дисциплины (модулей)

Интернет – ресурсы:

1. http://kyrlibnet.kg/ru/ec/
2. www.iprbookshop.ru
3. http://ilim.box/
4. https://www.who.int/hinari/en/
5. http://search.epnet.com/
6. https://www.cambridge.org/core
7. http://library.iuk.kg/ru/
8. www.math.by
9. www.webmath.ru
10. www.mathelp.spb.ru
11. www.ph4s.ru – сайт электронных книг по разделам математики
12. www.math24.biz – сайт решения задач on-line режиме

8. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся.

8.1. Планы практических (семинарских) и лабораторных занятий. Методические указания по организации и проведению

Тема 1. Матрицы и действия над ними. (2 ч.)

Цель: Формировать навыки выполнения операций над матрицами: сложение, вычитание, умножение матрицы на число, произведение матриц; формировать умения находить определители матриц.

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Определение и виды матриц.
2. Основные действия над матрицами.
3. Применение матриц.

Контрольные вопросы:

1. Что называется матрицей?. Что называется матрицей-строкой, матрицей- столбцом?
2. Какие матрицы называются прямоугольными, квадратными.?

3. Какая матрица называется диагональной, единичной, треугольной?
4. Что называется суммой матриц? Что называется произведением матрицы на число?
5. Как найти произведение двух матриц?

Примеры выполнения задания:

Пример 1. **Даны матрицы:**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 5 & 6\\ -3 & 7\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -7 & 0\\ 2 & 5\end{pmatrix}.$$

Можно ли сложить матрицу *A*: с матрицей *B*; с матрицей *C*; с матрицей *D*?

Решение:

Матрицу *A* нельзя сложить с матрицей *B*, так как матрица *A* имеет размеры 3×2, матрица *B* - размеры 2×3, а складывать можно только матрицы одинаковых размеров. Матрицы *A* и *C* имеют одинаковые размеры, поэтому их можно складывать.
Матрицы *A* и *D* имеют одинаковые размеры, следовательно, их можно складывать.

Пример 2. **Найти *A*+*B* , если**

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 6 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A+B=\begin{pmatrix}0 & 7 & 0\\ -2 & 10 & 2\end{pmatrix}.$$

Так как матрицы имеют одинаковый размер, то их можно складывать. При сложении матриц надо сложить элементы, стоящие на одинаковых местах, т.е.

$$A+B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 6 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+1 & 0+7 & -2+2\\ -5+3 & 6+4 & -3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 7 & 0\\ -2 & 10 & 2\end{pmatrix}.$$

Пример 3. **Дано:**

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 4 & -1\\ 6 & 3 & 0 & 11\\ 7 & 8 & 1 & -3\end{bmatrix}.$$

Найти: -*3A*.

Решение:

$$-3A=\begin{bmatrix}-6 & -15 & -12 & 3\\ -18 & -9 & 0 & -33\\ -21 & -24 & -3 & 9\end{bmatrix}.$$

Для того, чтобы -3 умножить на матрицу *A* нужно каждый элемент матрицы *A* умножить на -3.

$$-3A=\begin{bmatrix}-3\cdot 2 & -3\cdot 5 & -3\cdot 4 & -3\cdot(-1)\\ -3\cdot 6 & -3\cdot 3 & -3\cdot 0 & -3\cdot 11\\ -3\cdot 7 & -3\cdot 8 & -3\cdot 1 & -3\cdot(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & -15 & -12 & 3\\ -18 & -9 & 0 & -33\\ -21 & -24 & -3 & 9\end{bmatrix}.$$

Пример 4. **Даны матрицы:**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 10\\ 4 & 2 & -2\\ 2 & 7 & 13\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 13 & 1 & 4\\ -5 & 2 & 5\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1 & -5 & 2\\ 3 & -2 & 3\\ 0 & -1 & 6\end{pmatrix}.$$

Найти: *2A+B-3C*.

Решение:

$$2A+B-3C=\begin{pmatrix}-2 & 22 & 17\\ 12 & 11 & -9\\ -1 & 19 & 13\end{pmatrix}.$$

$$2A+B-3C=\begin{pmatrix}2 & 6 & 20\\ 8 & 4 & -4\\ 4 & 14 & 26\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 13 & 1 & 4\\ -5 & 2 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -15 & 6\\ 9 & -6 & 9\\ 0 & -3 & 18\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2-1-3 & 6+1-(-15) & 20+3-6\\ 8+13-9 & 4+1-(-6) & -4+4-9\\ 4-5-0 & 14+2-(-3) & 26+5-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 22 & 17\\ 12 & 11 & -9\\ -1 & 19 & 13\end{pmatrix}.$$

Задания к выполнению:

1. Транспонируйте матрицу $\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 7\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

2. Сложите матрицы A=$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 1\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix}6 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}$

3. Найти произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 5\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

4. Найдите сумму:

A=$\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

5. Найдите матрицу 2A+5B

A=$\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

6. Найдите произведения AB и BA:

A=$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

7. Дана матрица A=$\begin{pmatrix}5 & 8 & 4\\ 3 & 2 & 5\\ 7 & 6 & 0\end{pmatrix}$.. какую матрицу B надо прибавить, чтобы получить единичную матрицу

8. Дано A=$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Найдите сумму A^2+A+E

Список источников и литературы:

- литература (основная, дополнительная);

Основная литература:

1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с.

Дополнительная литература:

1. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

1. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

1. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.
2. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 2. Вычисление определителей матриц. Обратная матрица

Цель: Повторить определение определителя второго и третьего порядка, правило их вычисления. Закрепить на практике вычисление определителей.

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Определитель n-го порядка. Свойства определителей.
2. Вычисление определителя второго и третьего порядка.
3. Миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы.
4. Обратная матрица и способы ее нахождения.

Контрольные вопросы:

1. Что называется определителем 2 и 3 порядков?
2. Методы вычисления определителей 2 и 3 порядков.
3. Что называется алгебраическим дополнением?
4. Что такое минор?
5. Какими способами нужно найти обратную матрицу?

Примеры выполнения задания:

Пример 1. Найти определители матриц

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} и \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 5\cdot(-3) = 12-(-15) = 27; \quad \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Пример 2.

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $\det(AB)$.

Решение:

1-й способ: $\det A = 4-6 = -2; \quad \det B = 15-2 = 13; \quad \det(AB) = \det A \cdot \det B = -26$.

2- й способ: $AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 1 & 1\cdot 2+2\cdot 3 \\ 3\cdot 5+4\cdot 1 & 3\cdot 2+4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}, \quad \det(AB) = 7\cdot 18 - 8\cdot 19 = 126-152 = -26$.

Пример 3.

Вычислить определитель по правилу треугольника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+3\cdot4\cdot8-3\cdot5\cdot7-2\cdot4\cdot9-1\cdot6\cdot8=45+84+96-105-72-48=0$$

.

Задания к выполнению:

1. Решить уравнения, вычислив определители 2 порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2x-3 & 4 \\ -x & -3 \end{vmatrix}=0$ б) $\begin{vmatrix} x+3 & x+1 \\ x-1 & x-2 \end{vmatrix}=0$

2. Вычислить определители правилом «треугольников»:

А) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

3. Вычислить определители, разложением по строке или столбцу:

А) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

4. Найдите x из уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$; 2) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$; 3) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0$.

5. Найти обратную матрицу:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Список источников и литературы:

- *литература (основная, дополнительная);*

Основная литература:

1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с.

Дополнительная литература:

1. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

2. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

1. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.
2. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 3. Системы линейных алгебраических уравнений. Методы решения системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера. Метод Гаусса.

Цель: формировать навыки решения систем уравнений методом Крамера и методом Гаусса.

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Система m линейных уравнений с n неизвестными.
2. Матричный метод решения системы уравнений.
3. Решение системы линейных уравнений методом Крамера.
4. Алгоритм решения системы линейных уравнений методом Гаусса.

Контрольные вопросы:

1. Как решить систему уравнения матричным методом?
2. Как преобразовать расширенную матрицу?
3. В чем заключается решение систем линейных уравнений методом Крамера?
4. Какой алгоритм решения систем линейных уравнений методом Гаусса?

Примеры выполнения задания:

Пример:

Найти решение системы уравнений: $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$

1. *Метод Крамера*

1. Составим матрицу А данной системы:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Найдем определитель данной матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + (2-12) - (3-8) = -25 - 10 + 5 = -30$$

;

Определитель $|\Delta_1|$ получен из определителя $|\Delta|$ путем замены первого столбца столбцом свободных членов;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28-48) - (42-32) = -20 - 10 = -30$$

.

Определитель $|\Delta_2|$ получен из определителя $|\Delta|$ путем замены второго столбца столбцом свободных членов

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28-48)-(16-56) = -100+40 = -60$$

.

Определитель $|\Delta_3|$ получен из определителя $|\Delta|$ путем замены третьего столбца столбцом свободных членов

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32-42)+(16-56) = -50-40 = -90$$

.

1. Найдем решение системы

$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 1;\ x_2 = \Delta_2 / \Delta = 2;\ x_2 = \Delta_3 / \Delta = 3$

2. *Матричный метод.*

1. Для данной системы составим матричное уравнение

$$AX = B,\ \text{где A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 46 \end{pmatrix}.$$

Значит $X = A^{-1}B$

2. Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T,\ A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij};$$

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9)+1(2-12)-1(3-8) = -25-10+5 = -30$$

.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;\quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19;\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-30}\begin{pmatrix} -5 & 10 & -5 \\ -1 & 14 & 19 \\ -1 & -16 & 11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

3. Находим матрицу X.

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15}\\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\14\\46\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}0+\frac{14}{30}+\frac{16}{30}\\ -\frac{1}{3}0-\frac{98}{15}+\frac{128}{15}\\ \frac{1}{6}0+\frac{266}{30}-\frac{176}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

4. Итого решения системы: $x=1;\ y=2;\ z=3$.

3. Метод Гаусса.

1. Составим расширенную матрицу системы:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}5 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 14\\ 4 & 3 & 2 & 16\end{array}\right)$$

2. Пользуясь элементарными преобразованиями приводим данную матрицу к треугольному виду:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}5 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 14\\ 4 & 3 & 2 & 16\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 14\\ 5 & -1 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 2 & 16\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 14\\ 0 & -11 & -16 & -70\\ 0 & -5 & -10 & -40\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 14\\ 0 & -11 & -16 & -70\\ 0 & 1 & 2 & 8\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 14\\ 0 & 1 & 2 & 8\\ 0 & -11 & -16 & -70\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 14\\ 0 & 1 & 2 & 8\\ 0 & 0 & 6 & 18\end{array}\right)$$

3. Из полученной расширенной матрицы обратно составляем уравнения начиная снизу и находим значения неизвестных:

$6z=18;\ z=3$

$y+2z=8;\ y+2\cdot 3=8;\ y=2$

$x+2y+3z=14;\ x+2\cdot 2+3\cdot 3=14;\ x=1$

4. Итого решения системы: $x=1;\ y=2;\ z=3$.

Задания к выполнению:

1. Решить систему уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases}2x-y+2z=-3;\\ x+2y-z=4;\\ 3x+y-3z=-3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}10x+y+4z=1;\\ x-2y-7z=-3;\\ 2x+y+5z=0.\end{cases}$

2. Решить систему уравнения матричным методом:

а) $\begin{cases}5x_1+8x_2+x_3=2\\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7\\ 2x_1+x_2-x_3=-5\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=-7\\ x_1+4x_2+2x_3=-1\\ x_1-4x_2=-5\end{cases}$

3. Решить систему уравнения методом Гаусса:

а) $\begin{cases}4x+y-2z=10;\\ -x+3y-z=-1;\\ 3x-y+5z=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}5x+y-2z=5;\\ 10x+y+z=0;\\ x-y+z=-11.\end{cases}$

Список источников и литературы:

- литература (основная, дополнительная);

Основная литература:

1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с.

Дополнительная литература:

2. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

3. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

3. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.
4. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 9. Основные понятия теории множеств. Операции над множествами. Отношения на множествах (2ч.)

Цель: Усвоить понятие «множество» и формирование умений задавать множество различными способами. Формирование умений производить операции над множествами. Усвоить понятия «упорядоченные пары, декартово произведение, бинарные отношения». Научиться строить бинарные отношения внутри множества или между двумя множествами

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Обозначение множеств. Принадлежность элемента множеству. Пустое множество.
2. Объединение, пересечение, сравнение, разность множеств.
3. Декартовое произведение множеств.
4. Мощность множества. Бинарное отношение на множествах. Композиция отношений

Контрольные вопросы:

1. Какое множество называется универсальным?
2. Дайте определение объединения, пересечения, разности множеств.
3. Изобразите операции над множествами с помощью кругов Эйлера.
4. Дайте определение декартова произведения, бинарного отношения на множестве X.
5. Перечислите способы задания отношений

Примеры выполнения задания:

Пример 1. Задать три множества A, B, C из строчных букв русского алфавита. Сравнить их между собой.

Решение. Задаем три множества A, B, C. Множество A={а, б, с, д}; B={а, б, с, д, к, м}; C={а, б, с, д, с, м, б, а, к}. Множество A является подмножеством множеств B и C. Множество C равно множеству B, так как состоит из одних элементов.

Пример 2. Заданы три множества X,Y, Z. Множества равны: X{9,1,5}; Y={2 , 5 , 1, 7, 9}; Z={1, 2, 9, 1, 5, 2, 7, 5, 7}. Сравнить их между собой.

Решение. Множество X является подмножеством множеств Y и Z, так как все элементы множества X входят как в множество Y, так и в Z. Множество Z равно множеству Y, так как они состоят из одних и тех же элементов.

Пример 3. Записать множество $A=\{x|x\in Z\wedge x2<10\}$ перечислением элементов.

Решение. Множество A задано с помощью характеристического условия. Характеристическое условие в данном случае выражено записью "$x\in Z\wedge x^2<10$" (знак "$\wedge$" означает "и"). Расшифровывается эта запись так: "x – целое число, и $x^2<10$". Иными словами, в множество A должны входить лишь целые числа, квадрат которых меньше 10. Таких чисел всего 7, т.е. $A=\{0,-1,1,-2,2,-3,3\}$. Множество A теперь задано с помощью перечисления элементов.

Ответ: $A=\{0,-1,1,-2,2,-3,3\}$.

Задания к выполнению:

1. **Задайте множество другим способом** (если это возможно):

а) A = {x| x∈N, x ≤ 9}; б) A = {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}; в) A = {x| x∈ R, x^2 – 3 = 0}.

Ответы: а) Элементами множества А являются натуральные числа, которые меньше 9 и само число 9, значит, А = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};

б) А = {x| x ∈ Z, |x| ≤ 4} – множество целых чисел, модуль которых не больше четырех;

в) Элементами множества А являются корни уравнения x^2 – 3 = 0, значит, А = {- 3 , 3 }.

2. Задайте числовое множество описанием характеристического свойства элементов:

а) (0; 11); б) [-12,3; 1,1); в) [-5; 3]; г) (- ∞; -102,354].

Ответы: а) А = {x| x ∈ R, 0 < x <11}; б) С = {x| x ∈ R, -12,3 ≤ x < 1,1};

в) А = {x| x ∈ R, -5 ≤ x ≤ 3}; г) Р = {x| x ∈ R, x ≤ -102,354}.

3. Задайте перечислением множество $B = \{x: x^2 - 2x + 1 = 0\}$. Это стандартная запись для задания множества, читается она так: множество элементов x таких, что $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Ответ. $B = \{1\}$.

4. Определите множество A натуральных чисел, меньших 1/2.

Ответ. $A = \emptyset$

5. Определите множество значений x, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $x^2 \leq 9$ Ответ: [-3; 3] б) $(x^2 + 1) \leq 17$ Ответ: [-4; 4] в) $x^2 - 2x + 5 < 0$ Ответ: ∅

6. Записать все элементы множества чисел, которые делятся на 10

Ответ: {x| x – делятся на 10} .

7. Решив неравенство, записать его решения в виде числового промежутка:

а) {x2|x2+1>0}{x2|x2+1>0} ответ: (−∞;+∞)(−∞;+∞)

б) {x|1/x<0}{x|1/x<0} ответ: (−∞;0)(−∞;0).

в) {x|x2+7x+12<0}{x|x2+7x+12<0} ответ: (-4; -3).

8. Сколько существует подмножеств множества А={1, 2, 3}.

Ответы: {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}.

9. Даны множества:

а) К = {y| y = 1, если y∈N, то y + 1∈N}, У = {y| y∈Z, y > 0};

б) К = Ø, У = {Ø};

в) К = {с, п, р}, У = {{с, п}, р }. Равны ли множества К и У?

ответы:

а) Данные множества равны (К=У), т.к. любой элемент у из множества К принадлежит и множеству У, и, наоборот, любой элемент у из множества У принадлежит множеству К;

б) Нет не равны, т.к. множество К пустое, а множество У состоит из одного элемента (пустого множества);

в) Нет не равны, т.к. множество К состоит из трех элементов, а множество У – из двух. Причем два элемента из множества К (с и п) не принадлежат множеству У, а элемент из множества У (множество {с, п}) не принадлежит множеству К.

10. Х – множество млекопитающих, Н = {львы, тигры, волки, лисы}, М = {медведи, волки, орлы, страусы, обезьяны, киты}. Какие из данных множеств являются подмножеством множества Х?

Ответ: Множество М не является подмножеством множества Х, т.к. орлы и страусы – птицы, а не млекопитающие.

Список источников и литературы:

- *литература (основная, дополнительная);*

Основная литература:

1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с.

Дополнительная литература:

3. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

4. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

5. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.
6. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Примеры выполнения задания:

Пример 1. Найдем пересечение множеств A = {a, b, c, d, e} и B = {b, d, e, g, к}.

Решение: Обоим множествам принадлежат элементы b, d, e. Поэтому $A \cap B = \{b, d, e\}$.

Пример 2. Найдем объединение и разность множеств A и B, если $A = \{ x| -2/5 \le x \le 7/3\}$, $B = \{ x| -1/4 \le x \le 3\}$.

Решение. Если изобразить данные множества на числовой прямой, то объединение $A \cup B$ есть часть оси, где имеется хотя бы одна штриховка, т.е. отрезок [-2/5; 3]. Иначе говоря, $A \cup B = \{ x| -2/5 \le x \le 3\}$. Разность $A \setminus B$ есть часть отрезка, изображающего множество A, отмеченная лишь одной штриховке, т.е. полуинтервал [-2/5; -1/4), точка -1/4 принадлежит B и поэтому не принадлежит $A \setminus B$. Другими словами, $A \setminus B = \{ x| -2/5 \le x < -1/4\}$.

Пример 3. Известно, что A – множество учащихся, увлекающихся историей, B – множество учащихся, интересующихся биологией. Сформулируйте условия, при которых: а) $A \cup B = B$; б) $A \cap B = \varnothing$.

Решение: а) выясним, в каком отношении находятся множества A и B. Известно, что $A \cup B = B$, в том случае, когда $A \subset B$, т.е. все элементы множества A являются также и элементами множества B. Таким образом, $A \cup B = B$, если все учащиеся, увлекающиеся историей, увлекаются и биологией;

б) Исходя из равенства $A \cap B = \varnothing$ множества A и B не пересекаются, т.е. они не имеют общих элементов. Поэтому $A \cap B = \varnothing$, если все учащиеся, увлекающиеся историей, не интересуются биологией.

Задания к выполнению:

1. Пусть U = {0,1, 2, 3, 7, 9}, $A = \{x|x^3 - 4x^2 + зx = 0\}$, B = {1, 7}, C = {2, 7}.

Найдите: $A \cap B$, $A \cup C$, C , $A \setminus C$, $A \Delta C$, $B \cap C \cup A \cap B \cup B \cap C$.

Ответ. Множество A задано характеристическим свойством. Чтобы ответить на поставленные вопросы задачи, необходимо множество A задать списком. Корнями кубического уравнения $x^3 - 4x^2 + зx = 0$ являются числа 0 , 1 , 3, поэтому A = {0,1, 3}. Выполним указанные в условии задачи операции над множествами A, B , C согласно определениям этих операций:

$A \cap B = \{0, 1, 3\} \cap \{1, 7\} = \{1\}$; $A \cup C = \{0, 1, 3\} \cup \{2, 7\} = \{0, 1, 2, 3, 7\}$; $C = U \setminus C = \{0, 1, 2, 3, 7, 9\} \setminus \{2, 7\} = \{0, 1, 3, 9\}$; $A \setminus C = \{0, 1, 3\} \setminus \{2, 7\} = \{0, 1, 3\}$; $C \setminus A = \{2, 7\} \setminus \{0, 1, 3\} = \{2, 7\}$; $A \Delta C = A \setminus C \cup C \setminus A = \{0, 1, 3\} \cup \{2, 7\} = \{0, 1, 2, 3, 7\}$; $B \cap C = \{1, 7\} \cap \{0, 1, 3, 9\} = \{1\}$; B ∩Ñ = {1, 7}∩{2, 7}= {7} ; $A \cap B = U \setminus (A \cap B) = \{0,1, 2, 3, 7, 9\} \setminus \{1\} = \{0, 2, 3, 7, 9\}$; $B \cap C \cup A \cap B \cup B \cap C = \{1\} \cup \{0, 2, 3, 7, 9\} \cup \{7\} = \{0,1, 2, 3, 7, 9\} = U$

2. Построить диаграмму Венна, иллюстрирующую множество $M = (A \cap B) \cup (C \setminus B)$. Ответ. Построение диаграммы проведем поэтапно:

1) на рисунке 1 заштриховано множество $A \cap B$;

2) на рисунке 2 заштриховано множество $C \setminus B$;

3) на рисунке 3 заштриховано множество M = (A ∩ B)∪ (C \ B).

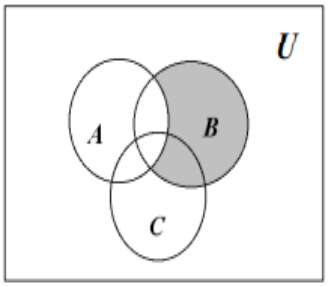


Рис. 1

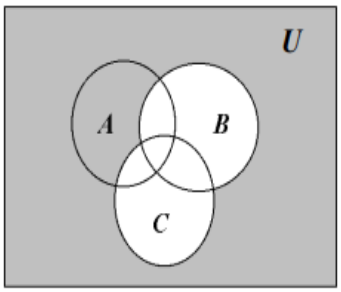


Рис. 2

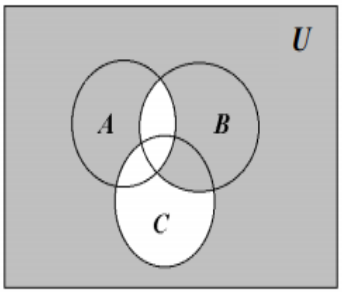


Рис. 3

3. Составить множество ***A*** из букв фамилии, множество ***B*** – из букв имени, множество ***C*** – из букв отчества (повторяющиеся элементы удалить). Найти: объединение множеств ***A***, ***B*** и ***C***, пересечение множеств ***A***, ***B*** и ***C***, разность ***A\B***, разность ***B\A***, симметрическую разность множеств ***A*** и ***B***.

4. Какие из нижеследующих множеств геометрических фигур на плоскости равны между собой, если: A – множество всех квадратов, B – множество всех прямоугольников, C – множество всех четырехугольников с прямыми углами, D – множество всех прямоугольников с равными сторонами, F – множество всех ромбов с прямыми углами.

Ответ: A=D=F; B=C.

5. Для каждого из слов: «сосна», «осколок», «насос», «колос» составьте множество его различных букв. Имеются ли среди них равные?

Ответ: A={с, о, н, а}, B={о, с, к, л}, C={н, а, с, о}, D={к, о, л,с}, A=C, B=D.

6. Даны множества: A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = {3, 6, 9}. Найти: A∪ B, A∩ B, A \ B, B \ A, AΔB . (см. пример П.1)

7. Даны множества: A ={x | 0 ≤ x ≤ 7}, $B = \{x|(x-6)(x^2+6x+9)=0\}$. Найти: A∪ B, A∩ B, A \ B, B \ A, AΔB .

8. Даны множества: A = {1, 2, 3}, $B = \{x|(x^2-6x+8)=0$. Найти: A∪ B, A∩ B, A \ B, B \ A, AΔB .

9. Доказать справедливость равенств (A∩B)′=A′∪B′(A∩B)′=A′∪B′

Доказательство.x∈(A∩B)′⇔x∉(A∩B)⇔x∉A∨x∉B⇔x∈(A∩B)′⇔x∉(A∩B)⇔x∉A∨x∉B⇔ x∈A′∨x∈B′⇔x∈A′∨x∈B′⇔ x∈(A′∪B′)⇔(A∩B)′=A′∪B′.

Список источников и литературы:

- *литература (основная, дополнительная);*

Основная литература:

1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с.

Дополнительная литература:

1. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

1. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

1. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.
2. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия.

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 10. Отношения на множествах

Примеры выполнения задания:

Пример 1. Отношение задано неравенством: $5x- 7y < 0$. Построить любое множество Z из упорядоченных пар. Выбрать из множества Z упорядоченные пары с бинарным отношением между элементами, удовлетворяющим заданному неравенству, и переписать их в другое множество.

*Решение***.** Новое множество Z из упорядоченных пар с бинарным отношением между элементами может быть любым, но обязательно должно содержать несколько упорядоченных пар с бинарным отношением между элементами, удовлетворяющим заданному неравенству. Например. Z={(0,0),(1,0),(-1,1),(1,1),(1,-1),(0,1)}.

Выбирают из множества Z пары так, чтобы при подстановке в заданное неравенство оно выполнялось. Новое множество получилось в виде:
R={{-1,1},{1,1},{0,1}}. Все упорядоченные пары во множестве R удовлетворяют заданному отношению.

Вывод. Бинарное отношение ρ равно множеству R и включено во множество Z: $\rho = R \subset Z$.

Пример 2. (Декартово произведение на одном множестве $X \times X$.) Пусть на множестве X={3, 5, 7} задано отношение «меньше» (т.е. первый элемент меньше второго, второй меньше третьего). Записать декартово произведение $X \times X$. Из этого множества следует выбрать элементы, которые должны удовлетворять отношению «меньше».

*Решение***.** Декартово произведение $X \times X$ может быть записано в виде множества из упорядоченных пар: $X \times X$= {(3;3),(3;5),(3;7),(5;3),(5;5),(5;7),(7;3),(7;5),(7;7)}.
Из этого множества выбираются элементы, которые удовлетворяют отношению «меньше». В результате получится новое множество из упорядоченных пар:
W={(3;5),(3;7),(5;7)}.

В новом множестве все пары являются элементами декартова произведения $X \times X$. Отношение «меньше» на множестве X является подмножеством декартова произведения $X \times X$. Бинарное отношение на множестве X есть подмножество декартова произведения $W \subset X \times X$.

Пример 3. (Декартово произведение двух множеств $X \times Y$.)
Пусть заданы два множества: X= {2, 6, 1}, Y= {7, 4, 8}. Записать декартово произведение $X \times Y$.

*Решение***.** Декартово произведение двух множеств равно:
$X \times Y$={(2, 7), (2, 4), (2, 8), (6, 7), (6, 4), (6, 8), (1, 7), (1, 4), (1, 8)}.

Пример 4. Определите свойства следующих отношений:
1. «прямая x пересекает прямую y» (на множестве прямых)
2. «число x больше числа y на 2» (на множестве натуральных чисел)
3. «число x делится на число y без остатка» (на множестве натуральных чисел)
4. «x – сестра y» (на множестве людей).

Решение: 1. xRy=«прямая x пересекает прямую y» (на множестве прямых). Это отношение: Рефлексивное, так как «прямая x пересекает прямую x» выполняется для любой прямой (она пересекает себя в каждой точке); Симметрическое, так как из того, что «прямая x пересекает прямую y» следует, что «прямая y пересекает прямую x» для любых прямых x,y; Также можно заметить, что это отношение не является тождественным, транзитивным и полным.
2. xRy=«число x больше числа y на 2» (на множестве натуральных чисел). Это отношение: Антирефлексивное, так как ни для одного элемента из множества натуральных чисел не выполняется «число x больше числа x на 2»; Антисимметрическое, так как для любых

элементов x,y из множества натуральных чисел из того, что «число x больше числа y на 2» следует невыполнение того, что «число y больше числа x на 2»; Также можно заметить, что это отношение не является тождественным, транзитивным и полным.
3. xRy=«число x делится на число y без остатка» (на множестве натуральных чисел). Это отношение: Рефлексивно, так как для любого элемента x из множества натуральных чисел выполняется «число x делится на число x без остатка»; Тождественно, так как для любых элементов x,y из множества натуральных чисел из того, что «число x делится на число y без остатка» и «число y делится на число x без остатка», следует, что x=y; Транзитивное, так как для любых элементов x,y,z из множества натуральных чисел из того, что «число x делится на число y без остатка» и «число y делится на число z без остатка», следует, что «число x делится на число z без остатка»; Также можно заметить, что это отношение не является симметрическим, антисимметрическим и полным. Это отношение является отношением порядка.
4. xRy=«x – сестра y» (на множестве людей) Это отношение: Антирефлексивно, так как для любого человека x неверно, что «x – сестра x»; Транзитивно, так как для любых людей x, y, z таких что «x – сестра y» и «y – сестра z» следует, что «x – сестра z» . Также можно заметить, что это отношение не является симметрическим, антисимметрическим, тождественным и полным.

Задания к выполнению:

1. По примеру 1 каждый студент самостоятельно задаёт отношения между двумя множествами X,Y в виде произвольного неравенства. Построить новое множество из упорядоченных пар с бинарным отношением между элементами так, чтобы при подстановке в заданное неравенство оно выполнялось. Записать два неравенства.
2. По примеру 2 каждый студент самостоятельно записывает множество X и декартово произведение на одном множестве $X \times X$.
3. По примеру 3 каждый студент самостоятельно записывает два множества: X и Y. Следует найти декартово произведение двух множеств $X \times Y$.

Список источников и литературы:

- *литература (основная, дополнительная)*

Основная литература:

1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с.

Дополнительная литература:

4. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

1. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

1. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.
2. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия.

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 12. Числовые последовательности (1ч.)

Цель: Формирование знаний о способах задания числовых последовательностей и закрепить умения вычислять пределы числовой последовательности.

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Числовые последовательности и операции над ними.
2. Понятие сходящейся последовательности.
3. Основные свойства сходящихся последовательностей.

Контрольные вопросы:

1. Какое множество называется универсальным?
2. Что такое дополнение множества до универсального?
3. Приведите пример любого множества и найдите его дополнение до универсального.

Примеры выполнения задания:

Пример 1. Вычислите пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}$

Решение: При $n\to\infty$ числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают, следовательно, нельзя применить теорему о пределе частного двух последовательностей.

Разделив числитель и знаменатель и знаменатель на старшую степень n, т.е. на $n^2\neq 0$ при $n\to\infty$ получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

Учтитывая, что последовательности $\frac{3}{n}$ и $\frac{1}{n^2}$ являются бесконечно малыми, и используя свойства бесконечно малых последовательностей, окончательно будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{0}{1}=0$$

. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}=0$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1}$

Решение: Разделив числитель и знаменатель и знаменатель на старшую степень n, т.е. на $n^2\neq 0$ при $n\to\infty$ получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}$$

При $n\to\infty$ последовательность $\left(1-\frac{1}{n^3}\right)$ является сходящейся и имеет предел, равный 1, а последовательность $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)$ является бесконечно малой и имеет предел, равный 0,

следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}=+\infty$ Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1}=+\infty$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

Здесь первоначально числитель и знаменатель дроби умножили на ненулевое сопряженное выражение $\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)$.

Задания к выполнению:

1. Найти предел последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n-1}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+1}{3n+1}$ в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+10n-5}{3n^3+3n}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-3}{n^3-n^2}$

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n+1}{2n^2-3n}$ е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2+2}{3n^3+4n}$ ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$ к) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}}$

Список источников и литературы:

- *литература (основная, дополнительная)*

Основная литература:

1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с.

Дополнительная литература:

1. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

1. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

1. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.
2. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия.

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 12. Функция и ее предел (1ч.)

Цель: Формирование знаний о способах задания функций и закрепить умения вычислять пределы функции.

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Понятие функции и способы задания функции.
2. Область определения функции.
3. Предел функции. Теоремы о пределах функции.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определения предела функции в точке, предела функции в бесконечности.
2. Какая функция называется бесконечно малой и каковы ее основные свойства?
3. Сформулируйте первый замечательный предел и его следствия.

Примеры выполнения задания:

Пример 1. Вычислите пределы следующих функций.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9-x^2}{x-1}$

Решение. Пользуясь непрерывностью функции *f(x)*, пробуем подставить значение *x = 2* в функцию *f(x)*: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9-x^2}{x-1}=\dfrac{9-4}{2-1}=5$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{4x^4-x^2+3x-7}$

Решение. Если вычисляется предел при $x\to\infty$ и имеется неопределенность типа $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, то пробуем в числителе и знаменателе вынести за скобки переменную в наивысшей степени (или числитель и знаменатель делим на переменную в наивысшей степени):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{4x^4-x^2+3x-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(4-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}-\frac{7}{x^4}\right)}=\frac{0-0+0}{4-0+0-0}=0$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^{1+2x}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cdot\sin 3x}{3x}=3$ и $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)=1$,

следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^{1+2x}=3^1=3$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{3x^2+1}\right)^{x^2}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{3}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$

Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{3x^2+1}\right)^{x^2}=\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{+\infty}\right]=0$.

Задания к выполнению:

1. Н**айдите предел следующих функций**:

а)

1.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$	9.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x-x^3}{3x-2x^2+x^4}$
2.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$	10.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$
3.	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$	11.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$

4.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$	12.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$
5.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$	13.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$
6.	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x}{x^4+2x^2-3}$	14.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^6}{x^3+x^4+x^5}$
7.	$\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$	15.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^3+3}{3x^3-5}$
8.	$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$	16.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{2x^3+3x^2}$

Список источников и литературы:

- *литература (основная, дополнительная)*

Основная литература:

1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с.

Дополнительная литература:

1. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

1. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

1. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.

www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия.

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 13-14. Производная и дифференциал функции (2ч.)

Цель: Научить вычислять производные сложных функций, пользуясь правилами дифференцирования и таблицей производных.

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Определение производной.
2. Дифференциал функции.
3. Производная сложных функций.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение производной.
2. Каков ее геометрический смысл?
3. Сформулируйте основные правила дифференцирования функций.

Примеры выполнения задания:

Пример 1. Найти производную от функции $y=\ln^3 x$.

Решение. Полагаем $z = \ln x$, тогда $y = z^3$. Отсюда $y'_z = 3z^2 = 3 \cdot \ln^2 x$, $z'_x = \frac{1}{x}$.

Следовательно, $y'_x = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$.

При достаточном навыке промежуточную переменную z не пишут, вводя ее лишь мысленно.

Пример 2. Найти производную от функции $y = \sin(x^3 - 3x^2 + 5)$.

Решение.

$$y' = \cos(x^3 - 3x^2 + 5) \cdot (x^3 - 3x^2 + 5)' = (3x^2 - 6x)\cos(x^3 - 3x^2 + 5) =$$

$$= 3x(x-2)\cos(x^3 - 3x^2 + 5).$$

Пример 3. Найти производную от функции $y = e^{\sqrt{x^2+x-1}}$.

Решение.

$$y' = e^{\sqrt{x^2+x-1}} \cdot \left(\sqrt{x^2+x-1}\right)' = \frac{e^{\sqrt{x^2+x-1}}}{2\sqrt{x^2+x-1}} \cdot (x^2+x-1)' = \frac{(2x+1) \cdot e^{\sqrt{x^2+x-1}}}{2\sqrt{x^2+x-1}}.$$

Задания к выполнению:

1. Найти производные следующих функций:

1.	$y = x + \ln\frac{x-1}{x+1}$	9.	$y = \frac{\sqrt{x^2-3}(2x^2+3)}{x^3}$
2.	$y = x^3 \ln x - x^2$	10.	$y = \ln\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$
3.	$y = x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}$	11.	$y = \frac{\sqrt{x^3+3x}}{x+1}$
4.	$y = \ln\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$	12.	$y = 5^{x^3} \cdot \ln^2 x$
5.	$y = \frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$	13.	$y = \frac{x\ln x + 1}{x\ln x - 1}$
6.	$y = \frac{4x - x^4}{1-3x^2}$	14.	$y = 5^{x^3} \cdot \ln^2 x$
7.	$y = \mathrm{arctg}(x-1) + \frac{x-1}{x^2-2x+2}$	15.	$y = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$
8.	$y = \sqrt[3]{\frac{1-e^{4x}}{e^{4x}}}$	16.	$y = \left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^2$

Список источников и литературы:

- *литература (основная, дополнительная)*

Основная литература:

1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с.

Дополнительная литература:

1. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

6. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

1. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.
2. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия.

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

8.2.Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модулей)

Вид работы	*Содержание (перечень вопросов)*	*Трудоемкость самостоятельной работы (в часах)*	*Рекомендации*
Раздел № 1. Линейная алгебра			
Подготовка к лекции №1-6	Определение и виды матриц. Основные действия над матрицами. Определитель n-го порядка. Вычисление определителя второго и третьего порядка. Обратная матрица и способы ее нахождения. Система m линейных уравнений с n неизвестными. Матричный метод решения системы уравнений. Решение системы линейных уравнений методом Крамера. Алгоритм решения системы линейных уравнений методом Гаусса	*N=6ч*	Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 4-е издание – Москва., Айрис пресс, 2006 г. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.
Написание реферата	Матрицы и их виды Элементарные матрицы Ранг матрицы Определители n-го порядка Свойства определителей Системы линейных	*N=3ч*	Реферат выполняется и оформляется по структуре реферата заданное преподавателем.

	уравнений Теорема Кронекера-Капелли. Методы решения систем линейных уравнений.		
Итого		*N=9ч*	
Подготовка к лекции №7-8	Уравнение прямой на плоскости. Кривые второго порядка. Уравнение прямой на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом, общее уравнение прямой, каноническое уравнение прямой, уравнение прямой в отрезках. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола	*N=2ч*	Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 4-е издание – Москва., Айрис пресс, 2006 г. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.
Написание реферата	Уравнение прямой в пространстве.	*N=1ч*	Реферат выполняется и оформляется по структуре реферата заданное преподавателем.
Итого		*N=3ч*	
Раздел № 2. Математический анализ			
Подготовка к лекции №9-17	Множество. Основные действия над множествами. Бинарное отношение на множествах. Числовые последовательности и операции над ними. Понятие функции и способы задания функции. Предел функции. Определение производной. Дифференциал функции.	*N=10ч*	Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 4-е издание – Москва., Айрис пресс, 2006 г. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач. www.webmath.ru - сайт решения

			практических задач по математике.
Написание реферата	Теория множеств. Последовательности. Функции. Пределы функций. Производная функции. Дифференциал функции	*N=4ч*	Реферат выполняется и оформляется по структуре реферата заданное преподавателем.
Итого		*N=14ч*	
Итого по дисциплине		*N=26 ч.*	

8.3. Методические рекомендации по подготовке письменных работ

Реферат — письменная работа объемом 10-18 печатных страниц, выполняемая студентом в течение модульного срока. Структура реферата:

1. Титульный лист.
2. После титульного листа на отдельной странице следует оглавление (план, содержание), в котором указаны названия всех разделов (пунктов плана) реферата и номера страниц, указывающие начало этих разделов в тексте реферата.
3. После оглавления следует введение. Объем введения составляет 1,5-2 страницы.
4. Основная часть реферата может иметь одну или несколько параграфов (подпунктов, разделов) и предполагает осмысленное и логичное изложение главных положений и идей, содержащихся в изученной литературе.
5. Заключение содержит главные выводы, и итоги из текста основной части, в нем отмечается, как выполнены задачи и достигнуты ли цели, сформулированные во введении.
6. Приложение может включать решение математических задач.
7. Библиография (список литературы).

8.4. Иные материалы

Для самостоятельной работы студентам задаются индивидуальные задачи для решения по пройденным темам.

1. Тема реферата:

1. История появления алгебры как науки
2. Математика в современном мире
3. Алгебра: основные начала анализа
4. Связь математики с другими науками
5. Способы вычисления интегралов
6. Определение элементарных функций
7. Двойные интегралы и полярные координаты
8. Запись и вычисление дифференциальных уравнений
9. История появления комплексных чисел
10. Математические головоломки и игры: сущность, значение и виды
11. Основы математического анализа.
12. Основные концепции математического моделирования.
13. Методы решения линейных уравнений.
14. Методы решения нелинейных уравнений.
15. Основополагающие концепции математической статистики.
16. Определение уравнения переходного процесса.
17. Решение смешанных математических задач.
18. Математическая философия Аристотеля.
19. Основные тригонометрические формулы.

20. Математик Эйлер и его научные труды.

2. Найти определитель разложением по строке или столбцу

1.	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ по 3 столбцу	6.	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ по 2 столбцу
2.	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ по 1 столбцу	7.	$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ по 2 строке
3.	$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ по 1 строке	8.	$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ по 3 строке
4.	$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ по 1 столбцу	9.	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ по 3 столбцу
5.	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ по 2 столбцу	10.	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ по 3 строке

3. Вычислить предел функции

1. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$
2. $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+7}-2}$
3. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7}$
4. $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}$
5. $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$
6. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$
7. $\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$
8. $\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{tgx-sinx}{x^3}$

10. $\lim_{x\to 0}\frac{x-sin2x}{x+sin3x}$

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет.

10. Глоссарий

1. **Аксиоматическое определение вероятности** — отношение подмножества, благоприятствующего событию к общему множеству.
2. **Асимметрия** — отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднеквадратического отклонения.
3. **Бесповторная выборка** — выборка, при которой отобранный объект после проведения обследований не возвращается в генеральную совокупность.
4. **Вероятность** — отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов.
5. **Внутрнгрупповая дисперсия** — средняя арифметическая групповых дисперсий, взвешенная по объемам групп.
6. **Выборка** — совокупность случайно отобранных из изучаемой совокупности объектов.
7. **Геометрическое определение вероятности** — отношение длины отрезка к длине отрезка L.
8. **Гистограмма** — ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат интервалы длиною h, а высоты n.
9. **Групповая дисперсия** — дисперсия значений признака, принадлежащих группе, относительно групповой средней.
10. **Групповая средняя** — среднее арифметическое значений признака, принадлежащих группе.
11. **Двумерная случайная величина** — величина, имеющая два аргумента.
12. **Дискретная случайная величина** — величина, принимающая отдельные значения с определенными вероятностями.
13. **Дисперсия** — математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.
14. **Доверительный интервал** — интервал, который покрывает неизвестный параметр θ с заданной надежностью y.
15. **Достоверное событие** — событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий.
16. **Закон распределения случайной величины** — соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.
17. **Интервальная оценка** — оценка, которая определяется концами интервала.
18. **Конкурирующая гипотеза** — гипотеза противоречащая основной.
19. **Корреляционная зависимость** — зависимость, при которой при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой.
20. **Корреляционный момент** — характеристика связи между двумя случайными величинами.
21. **Коэффициент вариации** — выраженное в процентах отношение выборочного среднего квадратического отклонения к выборочной средней.
22. **Коэффициент корреляции** — отношение ковариации к произведению средних квадратических отклонений двух случайных величин.
23. **Критическая область** — совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

24. **Математическое ожидание** — число, относительно которого стабилизируется среднее арифметическое возможных значений случайной величины при достаточно большом количестве испытаний.
25. **Межгрупповая дисперсия** — дисперсия групповых средних относительно общей средней.
26. **Мода** — варианта ряда, которая имеет наибольшую частоту.
27. **Моменты случайных величин** — характеристики случайных величин, определяющие математическое ожидание k-й степени отклонения случайной величины.
28. **Непрерывная случайная величина** — величина, принимающая значения, сколь угодно мало отличающиеся друг от друга.
29. **Несмещенная оценка** — оценка θ^*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру θ.
30. **Нулевая гипотеза** — основная выдвинутая гипотеза.
31. **Общая дисперсия** — дисперсия значений признака всей совокупности относительно общей средней.
32. **Плотность распределения вероятностей** — вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение на указанном интервале.
33. **Повторная выборка** — выборка, при которой отобранный объект возвращается после проведения обследования обратно в генеральную совокупность.
34. **Полигон частот** — ломаная линия, отрезки которой соединяют точки (x_1, n_1).
35. **Производящая функция** — функция, определяющая вероятность наступления события при различных вероятностях появления в каждом испытании.
36. **Размах варьирования *R*** — разность между наибольшей и наименьшей вариантой.
37. **Регрессия** — представление одной случайной величины как функции другой.
38. **Случайная величина** — величина, которая в результате испытания примет одно и только одно значение до опыта не известно какое.
39. **Состоятельная оценка** — оценка, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.
40. **Статистическая гипотеза** — гипотеза о виде неизвестного распределения, или параметрах неизвестного распределения.
41. **Статистический критерий** — случайная величина, служащая для проверки нулевой гипотезы.
42. **Статистическое распределение выборки** — перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.
43. **Стохастическая зависимость** — зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение другой.
44. **Теорема Лапласа** — определение вероятности наступления события в k измерениях из n (при больших k и n).
45. **Теория вероятностей** — наука, изучающая общие закономерности случайных явлений массового характера.
46. **Точечная оценка** — оценка, которая определяется одним числом.
47. **Условная вероятность** — вероятность наступления интересующего нас события, связанная с дополнительными условиями.
48. **Формула Байеса** - определение апостериорной (послеопытной) вероятности на основе априорной (доопытной) на основе проведения эксперимента.
49. **Формула Бернулли** — определение вероятности наступления события в измерениях из n.
50. **Функция распределения** — функция, определяющая вероятность того, что X примет значение меньше x.
51. **Характеристики положения** — характеристики, определяющие наиболее возможные значения случайной величины.
52. **Характеристики рассеивания** — характеристики, определяющие разброс возможных значений случайной величины.