МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
НЕКОММЕРЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
УЧЕБНО-НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ КОМПЛЕКС
«МЕЖДУНАРОДНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ КЫРГЫЗСТАНА»

«СОГЛАСОВАНО»
Проректор по учебно-административной работе НОУ УНПК «МУК»,
д.и.н., доц. Муса кызы Алина
____
«16» октября 2020 г.

«УТВЕРЖДЕНО»
Ректор НОУ УНПК «МУК»,
к.т.н., доцент Савченко Е.Ю.
____
«16» октября 2020 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Название дисциплины: Математика

Название и код направления подготовки: 530800 «Международные отношения»

Квалификация выпускника: Бакалавр

Форма обучения: Очная

Составитель: ст.преп. Эсенканова А.К.

График проведения модулей

1 семестр

неделя	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
лекция	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
сем. зан.	1	1	1	1	1	1	1	М	1	1	1	1	1	1	1	М	1

«РАССМОТРЕНО»
На заседании кафедры
«Естественно-научные дисциплины»
НОУ УНПК «МУК»
Протокол № 2
от «12» 10 2020 г.
И.о зав.кафедрой Касмалиева Дж.С
____

«ОДОБРЕНО»
На заседании Учебно-методического объединения НОУ УНПК «МУК»
Протокол № 5
от «15» октября 2020 г.
Председатель Учебно-методического объединения
Матвеева Т.В. _______________

«СОГЛАСОВАНО»
Директор Научной библиотеки
НОУ УНПК «МУК»
Асанова Ж.Ш. _______________

Бишкек 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Аннотация
Учебно-методического комплекса дисциплины
____________«Математика»___________
(наименование дисциплины (модуля)

Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика» составлен на основании ГОС ВПО КР 3-го поколения, утвержденного МОиН КР приказом № 1179/1 от «15» сентября 2015г. и учебным планом по направлению подготовки 530800 «Международные отношения»

Материалы УМК предназначены для очной формы обучения бакалавров. Учебная дисциплина «Математика» является базовой частью математического и естественнонаучного цикла основной образовательной программы подготовки бакалавров, реализуется на 1 курсе (1, 2 семестр).

Цель дисциплины состоит в формировании базовых знаний в области математики; в формировании понятий об элементах математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач профессиональной деятельности; в формировании представлений о разработке математических моделей для решения профессиональных задач; в формировании практических знаний и навыков математического исследования явлений и процессов, связанных с профессиональными исследованиями; компетенций обеспечивающих профессиональное решение задач, связанных с использованием методов математического исследования прикладных вопросов.

Задачи дисциплины - сформировать представления о месте и роли математики в современном мире; сформировать представления о системах основных понятий, используемых для описания важнейших математических моделей и математических методов, раскрытие взаимосвязи этих понятий; сформировать навыки самостоятельной работы, организации исследовательской работы; изучить разделы математики, которые помогут в освоении специальных дисциплин и в профессиональной деятельности; научить использовать математические методы для успешного овладения специальностью; сформировать основные навыки в изучении способов сбора результатов наблюдений и их обработки для более глубокого изучения сущности процессов и явлений в профессиональной деятельности.

Объем учебной нагрузки при изучении данной дисциплины для студентов составляет 120 часов, в том числе: обязательной аудиторной учебной нагрузки – 68 часов; самостоятельной работы – 52 часов.

Основные разделы дисциплины:

Раздел 1. Линейная алгебра и геометрия

Раздел 2. Математический анализ

Раздел 3. Теория вероятностей и математическая статистика

Проводится 2 модуля и итоговый контроль для контроля знаний студентов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЕЙ)

1. Пояснительная записка

1.1. Миссия и стратегия

Миссией данной УМК является подготовка высококвалифицированных специалистов в области международного отношения и повышение качества профессиональной подготовки посредством углубленного изучения математических дисциплин.

Стратегической целью является совершенствование системы высшего образования за счет усиления интеграции учебного процесса и научных исследований, широкого внедрения в образование новых информационных технологий, развития системы многоуровневого профессионального образования. Развитие и совершенствование системы управления качеством образования.

1.2. Цель и задачи дисциплины (модулей) (Вытекают из миссии и стратегии)

Цель дисциплины: формирование у студентов представления о месте математики в единой культуре, о методах и возможностях современной математики; способствовать развитию логического мышления и умения оперировать с абстрактными объектами; познакомить с основами математического моделирования.

Задачи дисциплины:

- *дать общее представление о роли и месте математики в современной культуре;*
- *развить математическое мышление и математическую культуру; познакомить студентов с математическими методами и основами математического моделирования;*
- *познакомить студентов с основами теории вероятностей и математической статистики;*
- *сформировать у студентов необходимые практические навыки формирования количественных оценок при проведении исследований.*

1.3. Формируемые компетенции, а также перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю) (знания, умения владения), сформулированные в компетентностном формате.

Студент в результате освоения дисциплины должен обладать следующими компетенциями:

- *общенаучными (ОК)*

- умеет использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применяет методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОК-11);

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

1. Знать: об основных математических структурах и методах, о математическом моделировании, вероятности и статистике, математических моделях.

2. Уметь: ориентироваться в потоке информации, содержащей математические вычисления; пользоваться справочной литературой.

3. Владеть: основными методами математического анализа.

Результаты обучения могут быть представлены в виде таблицы

Коды комп.	*Содержание компетенций*	*Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине*
ОК-11	*умеет использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применяет методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования*	*Знать*: фундаментальные основы математики *Уметь*: решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе математических методов и моделировании *Владеть*: основными методами математического анализа

1.4. Место дисциплины (модулей) в структуре ООП ВПО

Дисциплина (модуль) «Математика» является частью математического и естественнонаучного цикла (блока) дисциплин учебного плана по направлению подготовки (специальности) 530800 «Международные отношения».

Для освоения дисциплины (модулей) необходимы компетенции, сформированные в ходе изучения следующих дисциплин и прохождения практик: знания курса математики в объеме общеобразовательной средней школы; умения использовать основные математические понятия и методы при изучении прикладных задач.

В результате освоения дисциплины (модулей) формируются компетенции, необходимые для изучения следующих дисциплин и прохождения практик: математические методы и моделирование, методы оптимизационных решений.

2. *Структура дисциплины (модулей)*

Структура дисциплины (модулей) для очной формы обучения

Общая трудоемкость дисциплины составляет _4_ кредита, _120_ ч., в том числе аудиторная работа обучающихся с преподавателем_68_ ч., самостоятельная работа обучающихся _52_ ч.

№ п/п	**Раздел, Темы Дисциплины**	**Семестр**	**Неделя семестра**	**Виды учебной работы, включая самостоятель-ную работу студентов и трудоемкость (в часах)**				**Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)**
				Лекции	**Сем. заня /лаб. заня**	**СРС**	**СРС иП**	
	I семестр 1 модуль							
1.	Матрицы и их виды. Действия над матрицами.	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Решение задач*
2.	Определители матриц и их свойства. Вычисление определителей.	*1*	*2*	*1*	*1*	*1*		*Индивидуальные задания*
3.	Миноры и алгебраические дополнения. Обратная матрица и методы их вычисления	*1*	*3*	*1*	*1*	*1*		*Устный опрос*
4.	Системы линейных алгебраических уравнений.	*1*	*4*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Решение задач*

	Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом							
5.	Методы решения системы линейных алгебраических уравнений формулами Крамера.	*1*	*5*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Индивидуальные задания*
6.	Методы решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.	*1*	*6*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Решение задач*
7.	Уравнение прямой на плоскости.	*1*	*7*	*1*	*1*	*1*		*Индивидуальные задания*
8.	Кривые второго порядка	*1*	*8*	*1*	*1*	*1*		*Устный опрос*
	I семестр 2 модуль							
9.	Основные понятия теории множеств. Операции над множествами.	*1*	*9*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Решение задач*
10.	Отношения на множествах.	*1*	*10*	*1*	*1*	*1*		*Устный опрос*
11.	Числовые последователь-ности и их пределы	*1*	*11*	*1*	*1*	*1*		*Устный опрос*
12.	Понятие и предел функции и свойства пределов функций, замечательные пределы.	*1*	*12*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Решение задач*
13.	Понятие производной функции и производная сложной функции	*1*	*13*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Индивидуальные задания*
14.	Дифференциал функции и его применение в прибли-женных вычислениях.	*1*	*14*	*1*	*1*	*1*		*Устный опрос*
15.	Первообразная функция и неопределенный интеграл. Методы интегрирования	*1*	*15*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Проектирование задач*
16.	Определенный интеграл. Применение определенного интеграла	*1*	*16*	*1*	*1*	*2*		*Индивидуальные задания*
17.	Обобщение пройденного материала	*1*	*17*	*1*	*1*			*Устный опрос*
	Всего часов по семестру:			**17**	**17**	**17**	**8**	
	II семестр 1 модуль							
18.	Элементы комбинаторики	*2*	*18*	*1*	*1*	*1*		*Проектирование задач*
19.	Основные понятия теории вероятностей, определение и свойства вероятностей.	*2*	*19*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Устный опрос*
20.	Действия над вероятностями	*2*	*20, 21*	*2*	*2*	*2*		*Индивидуальные задания*
21.	Условная вероятность. Формула полной вероятности.	*2*	*22*	*1*	*1*	*2*	*1*	*Проектирование задач*
22.	Формула Байеса. Повторные испытания. Формула Бернулли	*2*	*23, 24*	*2*	*2*	*2*	*2*	*Решение задач*

	II семестр 2 модуль							
23.	Дискретная случайная величина и функция её распределения	*2*	*25*	*1*	*1*	*1*		*Устный опрос*
24.	Числовые характеристики случайных величин.	*2*	*26*	*1*	*1*			*Решение задач*
25.	Непрерывная случайная величина, функция распределения и плотность вероятности	*2*	*27*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Решение задач*
26.	Числовые характеристики непрерывных случайных величин.	*2*	*28*	*1*	*1*			*Индивидуальные задания*
27.	Задачи математической статистики. Генеральная совокупность и выборка.	*2*	*29*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Решение задач*
28.	Характеристики выборки и генеральной совокупности	*2*	*30*	*1*	*1*	*1*	*1*	*Устный опрос*
29.	Методы расчета сводных характеристик.	*2*	*31*	*1*	*1*	*2*	*1*	*Решение задач*
30.	Доверительный интервал для математического ожидания	*2*	*32*	*1*	*1*	*2*	*1*	*Индивидуальные задания*
31.	Проверка статистических гипотез	*2*	*33*	*1*	*1*	*1*		*Устный опрос*
32.	Обобщающая лекция по дисциплине	*2*	*34*	*1*	*1*	*1*		
	Всего часов по семестру:			***17***	***17***	***18***	***9***	
	Итого часов за год:			***34***	***34***	***35***	***17***	

3. Содержание дисциплины (модулей)

№	***Наименование раздела, темы дисциплины***	***Краткое содержание***
1.	*Линейная алгебра:* Матрицы и действия над ними. Определители и их свойства. Вычисление определителей.	Виды матриц. Сложение, вычитание, умножение на число, транспонирование, возведение в степень матриц, умножение двух матриц Вычисление определителей матриц второго порядка, третьего порядка
2.	*Линейная алгебра:* Миноры и алгебраические дополнения. Обратная матрица	Минор, алгебраические дополнения, разложение определителя по элементам строки или столбца. Обратная матрица. Ранг матрицы.
3.	*Линейная алгебра:* Системы линейных алгебраических уравнений. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом	Системы линейных алгебраических уравнений. Однородные, совместные системы уравнений. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом
4.	*Линейная алгебра:* Методы решения системы линейных алгебраических уравнений: Формулы Крамера. Метод	Формулы Крамера для решения систем уравнений. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Элементарные

	Гаусса.	преобразование матриц. Метод Гаусса решения систем уравнений
5.	*Аналитическая геометрия:* Уравнение прямой на плоскости. Кривые второго порядка	Уравнение прямой на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом, общее уравнение прямой, каноническое уравнение прямой, уравнение прямой в отрезках. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола
6.	*Математический анализ:* Основные понятия теории множеств. Операции над множествами. Отношения на множествах.	Множество. Понятие множества. Способы задания множества. Объединение, пересечение, сравнение, разность множеств. Декартовое произведение множеств. Мощность множества. Бинарное отношение на множествах. Композиция отношений.
7.	*Математический анализ:* Числовые последовательности и их пределы.	Числовые последовательности и операции над ними. Предел последовательности.
8.	*Математический анализ:* Понятие и предел функции и свойства пределов функций, замечательные пределы	Понятие функции и способы задания функции. Область определения функции. Предел функции. Теоремы о пределах функции.
9.	*Математический анализ:* Понятие производной функции и производная сложной функции	Определение производной функции и ее геометрический смысл. Производная сложных функций. Правила дифференцирования.
10.	*Математический анализ:* Дифференциал функции и его применение в приближенных вычислениях	Дифференциал функции. Основные правила дифференциала. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
11.	*Математический анализ:* Первообразная функция и неопределенный интеграл. Методы интегрирования	Понятие первообразной функции. Неопределённый интеграл и таблицы интегралов. Методы интегрирования функций
12.	*Математический анализ:* Определенный интеграл. Применение определенного интеграла	Формула Ньютона- Лейбница. Основные методы интегрирования определенных интегралов. Площадь криволинейной трапеции
13.	*Теория вероятностей:* Элементы комбинаторики.	Объекты комбинаторики, задачи комбинаторики; сочетания, перестановки, размещение.
14.	*Теория вероятностей:* Основные понятия теории вероятностей, определение и свойства вероятностей	Основные понятия теории вероятностей. Классическое и статистическое определение вероятностей. Свойства вероятностей.
15.	*Теория вероятностей:* Действия над вероятностями	Сложение вероятностей несовместных событий. Сложение вероятностей взаимно совместных событий. Умножение вероятностей.
16.	*Теория вероятностей:* Условная вероятность. Формула полной вероятности.	Формула полной вероятности и условные вероятности событий и примеры решения задач.
17.	*Теория вероятностей:* Формула Байеса. Повторные испытания. Формула Бернулли	Формула Байеса. Формула Бернулли. Примеры независимых повторных испытаний.
18.	*Теория вероятностей*: Дискретная	Определение дискретной случайной величины

	случайная величина и функция её распределения	и ряд её распределения. Функция распределения дискретной случайной величины: построение, вычисление.
19.	*Теория вероятностей:* Числовые характеристики случайных величин.	Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины. Формулы вычисления дисперсии.
20.	*Теория вероятностей:* Непрерывная случайная величина, функция распределения и плотность вероятности	Определение непрерывной случайной величины и её связь с вероятностью. Функция распределения непрерывной случайной величины и плотность вероятности.
21.	*Теория вероятностей:* Числовые характеристики непрерывных случайных величин	Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины. Формулы вычисления дисперсии.
22.	*Теория вероятностей:* Задачи математической статистики. Генеральная совокупность и выборка.	Основные понятия математической статистики. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд.
23.	*Математическая статистика:* Характеристики выборки и генеральной совокупности	Средние значения выборки. Дисперсия выборки. Стандартное отклонение.
24.	*Математическая статистика:* Методы расчета сводных характеристик.	Метод произведений и метод сумм Метод сумм вычисления выборочной средней и дисперсии, асимметрии и эксцесс
25.	*Математическая статистика:* Доверительный интервал для математического ожидания	Точечная и интервальная оценки среднего значения. Точечная и интервальная оценки удельного веса.
26.	*Математическая статистика:* Проверка статистических гипотез	Статистические гипотезы: основные понятия. Шаги проверки гипотез. Статистические критерии для проверки гипотез.

4. *Конспект лекций*

Тема 1. Матрицы и действия над ними. Определители и их свойства. Вычисление определителей

Определение матрицы. Матрицей называется прямоугольная таблица из чисел, содержащая некоторое количество m строк и некоторое количество n столбцов.

Основные понятия матрицы: Числа m и n называются порядками матрицы. В случае, если m=n, матрица называется **квадратной**, а число m=n — ее порядком.

В дальнейшем для записи матрицы будут применяться обозначение: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ Хотя иногда в литературе встречается обозначение: $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$ Впрочем, для краткого обозначения матрицы часто используется одна большая буква латинского алфавита, (например, А), либо символ ||aij||, а иногда и с разъяснением: A=||aij||=(aij) (i=1,2,…,m; j=1,2,…n)

Числа aij, входящие в состав данной матрицы, называются ее элементами. В записи aij первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j — номер столбца.

Например, матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ -2y & -5 & 0 \end{pmatrix}$ это матрица порядка 2×3, ее элементы a11=1, a12=x, a13=3, a21=-2y, …

Итак, мы ввели определение матрицы. Рассмотрим виды матриц и дадим соответствующие к ним определения.

Виды матриц

Введем понятие матриц: квадратных, диагональных, единичных и нулевых.

Определение матрицы квадратной: **Квадратной матрицей** n-го порядка называется матрица размера n×n. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

В случае квадратной матрицывводятся понятие главной и побочной диагоналей.

Главной диагональю матрицы называется диагональ, идущая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний ее угол.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Побочной диагональю той же матрицы называется диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Понятие диагональной матрицы: **Диагональной** называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю.

$$\begin{pmatrix} 3x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Понятие единичной матрицы: **Единичной** (обозначается E иногда I) называется диагональная матрица с единицами на главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Понятие нулевой матрицы: **Нулевой** называется матрица, все элементы которой равны нулю.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Понятия определителя

Определителем квадратной матрицы или просто определителем (детерминант) называется число, которое ставится в соответствие матрице и может быть вычислено по её элементам.

$$\Delta = \det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Квадратная матрица первого порядка состоит из одного элемента поэтому её определитель равен самому элементу $\Delta = |a_{11}| = a_{11}$
- Определитель второго порядка вычисляется по формуле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- Определитель третьего порядка вычисляется по правилу треугольника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Тема 3. Миноры и алгебраические дополнения. Обратная матрица

Определение минора

Дополнительным минором M_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы *A* называется определитель *(n-1)* -го порядка полученный из исходного вычеркиванием *i*-ой строки и *j*-ого столбца на пересечении которых данный элемент находится.

Алгебраическое дополнение (адъюнкт)

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Вычисление определителей

Теорема (без доказательств) о разложении определителя по элементам строки (столбца). Для каждой квадратной матрицы A порядка n имеет место формула

$$\Delta = \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \ \text{Íńëč}\ i = \overline{1,n};$$

$$\Delta = \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \ \text{Íńëč}\ j = \overline{1,n}.$$

Пример:

$$|a_{11}| = a_{11},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = \langle A_{11} = (+)a_{22}; A_{12} = (-)a_{21} \rangle = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Свойства определителей

- При транспонировании величина определителя не меняется.
- Строки и столбцы определителя эквиваленты.
- Если в определители поменять местами какие-либо две строки (столбца) местами, то определитель меняет знак.
- Определитель с двумя одинаковыми столбцами (строками) равен 0.
- При умножении элементов какого-либо столбца (строки) на число а, определитель умножается на это число.
- Если все элементы какого-либо столбца (строки) равны 0 , то определитель равен 0.
- Если элементы двух строк (столбцов) пропорциональны, то определитель равен 0.
- Пусть каждый элемент какого-либо столбца (строки) определителя равен сумме двух слагаемых, тогда этот определитель равен сумме двух определителей, причём в первом их них соответствующий столбец (строка) состоит из первых слагаемых, а во втором - из вторых слагаемых.
- Определитель не изменится, если к элементам какого-либо столбца (строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца умноженного на одно и тоже число.
- Сумма произведений элементов какого-либо столбца определителя на алгебраического дополнения к элементам другого столбца равна 0.

Тема 4. Системы линейных алгебраических уравнений. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом

Задана система N линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с N неизвестными, коэффициентами при которых являются элементы матрицы $A(a_{ij})$, а свободными членами - числа $b_1, b_2, \ldots, b_N$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \ldots + a_{NN}x_N = b_N. \end{cases}$$

Первый индекс i возле коэффициентов a_{ij} указывает в каком уравнении находится коэффициент, а второй j - при котором из неизвестным он находится.
Если определитель матрицы A не равен нулю

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{vmatrix} \neq 0$$

то система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение.

Решением системы линейных алгебраических уравнений называется такая упорядоченная совокупность N чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, которая при $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \dots, x_N = \lambda_N$ превращает каждое из уравнений системы в правильную равенство.

Если правые части всех уравнений системы равны нулю, то систему уравнений называют однородной. В случае, когда некоторые из них отличны от нуля – неоднородной $b_j \neq 0, (j = 1, 2, \dots, k)$.

Матричный метод решения

Запишем заданную систему в матричном виде:

$$AX = B$$

Если матрица A невырождена, то тогда с помощью операций над матрицами выразим неизвестную матрицу X . Операция деления на множестве матриц заменена умножением на обратную матрицу, поэтому домножим последнее равенство на матрицу A^{-1} слева:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow \; EX = A^{-1}B \Rightarrow$$
$$X = A^{-1}B$$

Поэтому, чтобы найти неизвестную матрицу X надо найти обратную матрицу к матрице системы и умножить ее справа на вектор-столбец свободных коэффициентов.

Данный метод удобно применять тогда, когда нужно решить много одинаковых систем с разными правыми частями.

Примеры решения систем уравнений

Задание. Найти решение СЛАУ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$ матричным методом.

Решение. Выпишем матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и матрицу правых частей $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу для матрицы системы. Для матрицы второго порядка обратную можно находить по следующему алгоритму: 1) матрица должна быть невырождена, то есть ее определитель не должен равняться нулю: $|A| = 1$; 2) элементы, стоящие на главной диагонали меняем местами, а у элементов побочной диагонали меняем знак на противоположный и делим полученные элементы на определитель матрицы. Итак, получаем, что

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -11 \\ 31 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Две матрицы одного размера равны, если равны их соответствующие элементы, то есть в итоге имеем, что $x_1 = -11$, $x_2 = 31$

Ответ. $x_1 = -11$, $x_2 = 31$

Тема 5-6. Методы решения системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера. Метод Гаусса.

ТЕОРЕМА КРАМЕРА. Если определитель Δ системы N линейных алгебраических уравнений с N неизвестными отличен от нуля $\Delta \neq 0$ то эта система имеет единственное решение, которое находится **по формулам Крамера:**

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_N = \frac{\Delta_N}{\Delta}.$$

$\Delta_j \left(j = 1, 2, \ldots, N \right)$ - определители, образованные с Δ заменой j -го столбца, столбцом из свободных членов.

Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$ отличен от нуля, то СЛАУ решений не имеет. Если же $\Delta_j = 0, \ \left(j = 1, 2, \ldots, N \right)$, то СЛАУ имеет множество решений. Рассмотрим примеры с применением метода Крамера.

Метод Гаусса заключается в **последовательном исключении переменных** и преобразовании системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

к треугольному виду

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1; \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2; \\ \qquad\qquad \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ \qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n, \ c_{kk} = 1, \left(k = 1, \ 2, \ \ldots, \ n \right). \end{cases}$$

Предположим, что в системе коэффициент $a_{11} \neq 0$. Если это условие не выполняется, то на первое место переносим уравнение, которое ее удовлетворяет. С помощью первого уравнения исключим x_1 из остальных уравнений.

Для этого делят первую строчку на a_{11}, обозначим

$$a_{1k}^1 = \frac{a_{1k}}{a_{11}}, \ \left(k = 0, 1, 2, \ldots, n \right).$$

Дальше второй строки вычитаем первую строку, умноженную на a_{21};от третьего первую строчку, умноженный на a_{31}; и так далее до последней строки. Получим таблицу коэффициентов:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 1 \\ a_{11}^1 & a_{12}^1 & \ldots & a_{1n}^1 & b_1^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \ldots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2}^1 & \ldots & a_{nn}^1 & b_n^1 \end{array}$$

Для неизвестных $x_2, \ldots, x_n$ имеем систему $n - 1$ уравнений. Выполняя, как и раньше, исключим x_2 из всех уравнений, начиная с третьего. Для этого сначала разделим вторую строчку на a_{22}^1.

Если коэффициент $a_{22}^1 = 0$, то переставим уравнения так, чтобы выполнялось условие $a_{22}^1 \neq 0$. Обозначив

$$a_{2k}^2 = \frac{a_{2k}^1}{a_{22}^1}, \ \left(k = 2, \ \ldots, \ n \right), \ b_2^2 = \frac{b_2^1}{a_{22}^1},$$

от третьей строки вычтем вторую строчку, умноженный на a_{32}^{1};
Продолжая процесс исключения неизвестных получим таблицу:

x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n	1
a_{11}^1	a_{12}^1	a_{13}^1	...	$a_{1,n-1}^1$	a_{1n}^1	b_1^1
0	a_{22}^2	a_{23}^2	...	$a_{2,n-1}^2$	a_{2n}^2	b_2^2
0	0	a_{33}^3	...	$a_{3,n-1}^3$	a_{3n}^3	b_3^3
...	...	...	...	...	...	...
0	0	0	...	$a_{n-1,n-1}^{n-1}$	$a_{n-1,n}^{n-1}$	$b_{n-1,0}^{n-1}$
0	0	0	...	0	a_{nn}^n	b_{n0}^n

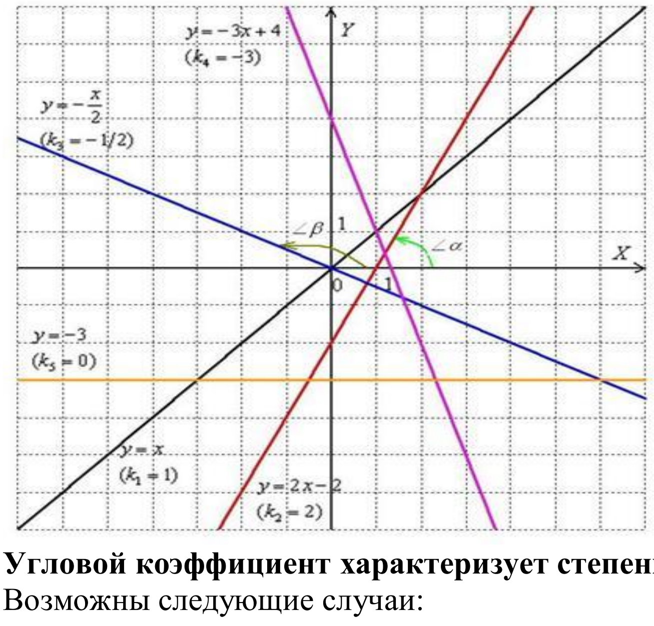
Таблица коэффициентов при неизвестных сводится к треугольному виду. Все главной диагонали элементы $a_{kk}^1=1$. Запишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}^1x_1+a_{12}^1x_2+a_{13}^1x_3+\ldots+a_{1,n-1}^1x_{n-1}+a_{1,n}^1x_n=b_1^1 \\ a_{22}^2x_2+a_{23}^2x_3+\ldots+a_{2,n-1}^2x_{n-1}+a_{2,n}^2x_n=b_2^2 \\ a_{33}^3x_3+\ldots+a_{3,n-1}^3x_{n-1}+a_{3,n}^3x_n=b_3^3 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n-1,n-1}^{n-1}x_{n-1}+a_{n-1,n}^{n-1}x_n=b_{n-1}^{n-1} \\ a_{n,n}^{n}x_{n-1}+a_{n-1,n}^{n-1}x_n=b_{n-1}^{n-1} \\ a_{n,n}^n x_n=b_n^n \end{cases}$$

Тема 7. Уравнение прямой на плоскости. Кривые второго порядка

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнения прямой $y=kx+b$ называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом *k***. Например, если прямая задана уравнением $y=2x-2$, то её угловой коэффициент: $k=2$. Рассмотрим геометрический смысл данного коэффициента и то, как его значение влияет на расположение прямой:



Угловой коэффициент характеризует степень наклона прямой к оси абсцисс.
Возможны следующие случаи:

1) Если угловой коэффициент отрицателен: $k<0$, то линия, грубо говоря, идёт сверху вниз. Примеры – «синяя» и «малиновая» прямые на чертеже.

2) Если угловой коэффициент положителен: $k>0$, то линия идёт снизу-вверх. Примеры – «чёрная» и «красная» прямые на чертеже.

3) Если угловой коэффициент равен нулю: $k=0$, то уравнение $y=kx+b$ принимает вид $y=b$, и соответствующая прямая параллельна оси OX. Пример – «жёлтая» прямая.

В геометрических задачах часто фигурируют несколько прямых, поэтому их удобно как-нибудь обозначать.

Обозначения: прямые обозначаются маленькими латинскими буквами: $a, b, c, d, \ldots, l, m, n, \ldots$ Популярный вариант – обозначение одной и той же буквой с натуральными подстрочными индексами. Например, те пять прямых, которые мы только что рассмотрели, можно обозначить через m_1, m_2, m_3, m_4, m_5.

Поскольку любая прямая однозначно определяется двумя точками, то её можно обозначать данными точками: AB, CD, KL, PR и т.д. Обозначение AB совершенно очевидно подразумевает, что точки A и B принадлежат прямой AB.

Если известна точка $M(x_0, y_0)$, принадлежащая некоторой прямой, и угловой коэффициент k этой прямой, то уравнение данной прямой выражается формулой:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Пример. Составить уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \frac{3}{2}$, если известно, что точка $A(3;-2)$ принадлежит данной прямой.

Решение: Уравнение прямой составим по формуле $y - y_0 = k(x - x_0)$. В данном случае:

$$y - (-2) = \frac{3}{2} \cdot (x - 3)$$

$$y + 2 = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$$

Ответ: $y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$

Общее уравнение прямой

Общее уравнение прямой имеет вид: $Ax+By+c=0$, где A, B, C – некоторые числа. При этом коэффициенты A, B *одновременно* не равны нулю, так как уравнение теряет смысл.

Пример. Написать уравнение с угловым коэффициентом $y=2x-2$ общим уравнением прямой.

Решение: Сначала перенесём все слагаемые в левую часть:

$$y - 2x + 2 = 0$$

Слагаемое с «иксом» нужно поставить на первое место:

$$-2x + y + 2 = 0$$

Уравнение имеет вид $Ax+By+c=0$, но по правилам математического этикета коэффициент первого слагаемого (в данном случае A) должен быть положительным. Меняем знаки: $2x-y-2=0$

Ответ: $2x-y-2=0$

Направляющий вектор прямой

Вектор, который параллелен прямой, называется направляющим вектором данной прямой. Очевидно, что у любой прямой бесконечно много направляющих векторов, причём все они будут коллинеарны (сонаправлены).

Направляющий вектор обозначим следующим образом: $\bar{p}(p_1, p_2)$.

Но одного вектора недостаточно для построения прямой, вектор является свободным и не привязан к какой-либо точке плоскости. Поэтому дополнительно необходимо знать некоторую точку $\boldsymbol{M(x_0, y_0)}$, которая принадлежит прямой.

Если известна некоторая точка $\boldsymbol{M(x_0, y_0)}$, принадлежащая прямой, и направляющий вектор $\bar{p}(p_1, p_2)$ этой прямой $(p_1 \neq 0, p_2 \neq 0)$, то уравнение данной прямой можно составить по формуле:

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}$$

Иногда его называют *каноническим уравнением прямой*.

Пример. Составить уравнение прямой по точке *M(1; 2)* и направляющему вектору $\bar{p}(2, 1)$

Решение: Уравнение прямой составим по формуле $\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}$. В данном случае:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{1}$$

С помощью свойств пропорции избавляемся от дробей:

$$1 \cdot (x - 1) = 2 \cdot (y - 2)$$

И приводим уравнение к общему виду:

$$x - 1 = 2y - 4$$

$$x - 2y + 3 = 0$$

Ответ: $x - 2y + 3 = 0$

Если прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$ **, то вектор** $\bar{p}(-B; A)$ **является направляющим вектором данной прямой.**

Примеры нахождения направляющих векторов прямых:

1) $5x + 7y - 1 = 0 \Rightarrow \quad \bar{p}(-7; 5)$

2) $2y + 3 = 0 \quad (0 \cdot x + 2y + 3 = 0) \Rightarrow \quad \bar{p}(-2; 0)$

3) $5x - 2 = 0 \quad (5x + 0 \cdot y - 2 = 0) \Rightarrow \quad \bar{p}(0; 5)$

Уравнение прямой проходящей через две точки

Если известны две точки $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$, то уравнение прямой, проходящей через данные точки, можно составить по формуле:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Пример. Составить уравнение прямой по двум точкам $A\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right), B(-1; 7)$.

Решение: Используем формулу:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{-1-\frac{3}{2}}=\frac{y-\frac{7}{3}}{7-\frac{7}{3}}$$

Сделаем несколько преобразований и получаем ответ.

Ответ: $AB: 28x+15y-77=0$

1.1

1.2 Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении Ах + Ву + С = 0 С≠0, то, разделив на –С, получим: $-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1$ или $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где $a=-\frac{C}{A}$; $b=-\frac{C}{B}$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *а* является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а *b* – координатой точки пересечения с осью Оу.

Пример. Задано общее уравнение х – у + 1 = 0. Найти его в виде уравнение прямой в отрезках.

Решение:

С = 1, $-\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$, а = -1, b = 1.

Тема 8. Кривые второго порядка

Общее уравнение линии второго порядка имеет вид $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, где A, B, C, D, E, F – произвольные действительные числа, причём коэффициенты A, B, C не равны одновременно нулю.

Если $A=B=C=0$, то уравнение упрощается до $2Dx+2Ey+F=0$, и если коэффициенты D, E одновременно не равны нулю, то это в точности **общее уравнение «плоской» прямой**, которая представляет собой *линию первого порядка*.

Окружность.

Определение: Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от одной и той же точки.

Уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

где *a* и *b* - координаты центра окружности, а *r* - радиус окружности. Если же центр окружности находится в начале координат, то ее уравнение имеет вид

$$x^2+y^2=r^2.$$

Эллипс.

Определение: **Эллипсом** называется множество точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная.

Замечание. При совпадении точек F_1 и F_2 эллипс превращается в окружность.

Выведем уравнение эллипса, выбрав декартову систему координат так, чтобы ось *Ox* совпала с прямой F_1F_2, начало координат – с серединой отрезка F_1F_2. Пусть длина этого отрезка равна $2c$, тогда в выбранной системе координат $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$. Пусть точка $M(x,\ y)$ лежит на эллипсе, сумма расстояний от нее до F_1 и F_2 равна $2a$. Тогда $r_1 + r_2 = 2a$, но $r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$, поэтому $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$.

Введя обозначение $b^2 = a^2-c^2$ и проведя несложные алгебраические преобразования, получим **каноническое уравнение эллипса**:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Определение: **Эксцентриситетом** эллипса называется величина $e=c/a$

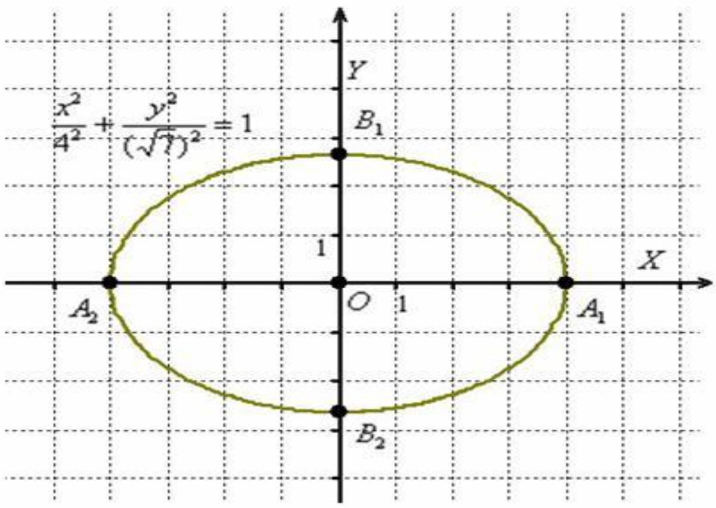
Определение: **Директрисой** D_i эллипса, отвечающей фокусу F_i, называется прямая, расположенная в одной полуплоскости с F_i относительно оси Oy перпендикулярно оси Ox на расстоянии a/e от начала координат.

Пример. Построить эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

Решение: сначала приведём уравнение к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{7})^2}=1$$

Это позволяет моментально определить **вершины эллипса**, которые находятся в точках $A_1(4;\ 0),\ A_2(-4;\ 0),\ B_1(0;\ \sqrt{7}),\ B_2(0;\ -\sqrt{7})$:



Отрезок A_1A_2 называют **большой осью** эллипса;

отрезок B_1B_2 – **малой осью**;

число $a = |OA_1| = |OA_1|$ называют **большой полуосью** эллипса;

число $b = |OB_1| = |OB_1|$ – **малой полуосью**.

в нашем примере: $a = 4, b = \sqrt{7}$.

Заданный каноническим уравнением эллипс симметричен относительно координатных осей, а также относительно начала координат.

Гипербола

Определение: **Гиперболой** называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная.

Выведем каноническое уравнение гиперболы по аналогии с выводом уравнения эллипса, пользуясь теми же обозначениями.

$|r_1 - r_2| = 2a$, откуда $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$. Если обозначить $b^2=c^2-a^2$, отсюда можно получить

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ **- каноническое уравнение гиперболы**

Определение: **Эксцентриситетом** гиперболы называется величина $e=\frac{c}{a}$.

Определение: **Директрисой** D_i гиперболы, отвечающей фокусу F_i, называется прямая, расположенная в одной полуплоскости с F_i относительно оси Oy перпендикулярно оси Ox на расстоянии $\frac{a}{e}$ от начала координат.

Пример. Построить гиперболу, заданную уравнением $5x^2-4y^2=20$

Решение: приведём данное уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Обе части

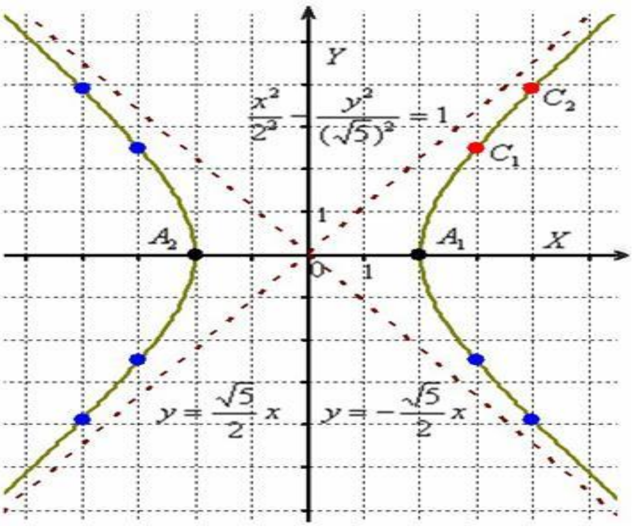
исходного уравнения делим на 20:

$$\frac{5x^2-4y^2}{20}=\frac{20}{20}$$

$$\frac{5x^2}{20}-\frac{4y^2}{20}=1$$

Сократим обе дроби, выделяем квадраты в знаменателях и получаем уравнение:

$$\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$$



Парабола.

Определение: **Параболой** называется множество точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F этой плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой. Точка F называется **фокусом** параболы, а прямая – ее **директрисой**.

Для вывода уравнения параболы выберем декартову систему координат так, чтобы ее началом была середина перпендикуляра FD, опущенного из фокуса на директрису, а координатные оси располагались параллельно и перпендикулярно директрисе. Пусть длина отрезка *FD* равна *p*. Тогда из равенства *r* = *d* следует, что $\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\frac{p}{2}+x,$ поскольку $r=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}, d=\frac{p}{2}+x.$ Алгебраическими преобразованиями это уравнение можно привести к виду: $y^2 = 2px$, называемому **каноническим уравнением параболы**.

Величина p называется **параметром** параболы.

Пример. Построить параболу $y^2=4x$

Решение: вершина известна, найдём дополнительные точки. Уравнение $y=\sqrt{4x}=2\sqrt{x}$ определяет верхнюю дугу параболы, уравнение $y=-2\sqrt{x}$ – нижнюю дугу.

Из уравнения параболы находим $y=\pm 2\sqrt{x}$. Подставляя следующие значения *x* получаем:

$x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\pm 2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{2}\approx\pm 1{,}41;$

$x=1\Rightarrow y=\pm 2\cdot\sqrt{1}=\pm 2;$

$x=2\Rightarrow y=\pm 2\cdot\sqrt{2}\approx\pm 2{,}83;$

$x=4\Rightarrow y=\pm 2\cdot\sqrt{4}=\pm 4.$

Точка F называется **фокусом** параболы, прямая d – **директрисой** параболы. Константа «пэ» канонического уравнения $y^2=2px$ называется **фокальным параметром**, который равен расстоянию от фокуса до директрисы. В данном случае $p=2$. При этом фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, а директриса задаётся уравнением $x+\frac{p}{2}=0$.

Тема 9. Основные понятия теории множеств. Операции над множествами. Отношения на множествах.

Понятие множества является одним из основных понятий математики. Оно не имеет точного определения и, как правило, объясняется с помощью примеров.

Понятие множества — является одним из тех фундаментальных понятий математики, которым трудно дать точное определение, используя элементарные понятия. Поэтому ограничимся описательным объяснением понятия множества.

Множеством называется совокупность определенных вполне различаемых объектов, рассматриваемых как единое целое. Создатель теории множеств Георг Кантор давал следующее определение множества — «множество есть многое, мыслимое нами как целое».

Объекты, из которых состоит множество, называются ***элементами множества.***

ПРИМЕР

Множество домов на данной улице, множество натуральных чисел, множество студентов группы и т. д.

Множества обычно обозначают заглавными латинскими буквами A, B, C, D, X, Y…, элементы множества строчными латинскими буквами – a, b, c, d, x, y…

Для обозначения того, что объект *x* является элементом множества A, используют символику: $x\in$A (читается: *x* принадлежит A), запись $x\notin$A обозначает, что объект *x* не является элементом множества A (читается: *x* не принадлежит A).

Принято использовать следующие обозначения:

- a ∈ X — «элемент a принадлежит множеству X»;
- a ∉ X — «элемент a не принадлежит множеству X»;

- ∀ — квантор произвольности, общности, обозначающий «любой», «какой бы не был», «для всех»;
- ∃ — квантор существования: ∃y ∈ B — «существует (найдется) элемент y из множества B»;
- ∃! — квантор существования и единственности: ∃!b ∈ C — «существует единственный элемент b из множества C»;
- : — «такой, что; обладающий свойством»;
- → — символ следствия, означает «влечет за собой»;
- ⇔ — квантор эквивалентности, равносильности — «тогда и только тогда».

Множества бывают **конечные** и **бесконечные**. Множества называются **конечным**, если число его элементов конечно, т.е. если существует натуральное число n, являющееся числом элементов множества. $A=\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$. Множество называется **бесконечным**, если оно содержит бесконечное число элементов. $B=\{b_1, b_2, b_3, ...\}$. Например, множество букв русского алфавита — конечное множество. Множество натуральных чисел — бесконечное множество.

Множество не содержащее ни одного элемента называется ***пустым*** (обозначается: Ø).

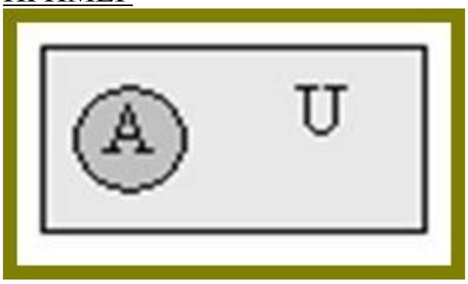
Множества из элементов которого составляем конкретное множество называется ***универсальным*** (обозначается: U).

ПРИМЕР

U – множество людей на земле,   A – студенты группы Эп-305.

Множества можно изображать с помощью кругов, которые называются ***кругами Эйлера*** или ***диаграммами Венна***, универсальное множество принято обозначать прямоугольником.

ПРИМЕР



Операции над множествами

1) Сравнение множеств

Множество A называется ***подмножеством*** множества B, если все элементы множества A содержатся во множестве B.

$$A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$$

Два множества называются ***равными***, если они содержат одинаковые наборы элементов. $A=B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

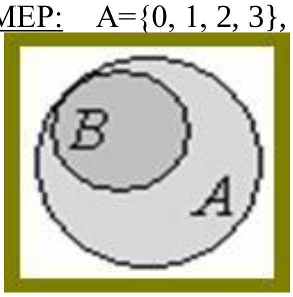
ТЕОРЕМА

\# Пустое множество Ø является подмножеством всех множеств.

\# Универсальное множество U содержит все множества.

\# Если $A \subset B$, то B надмножество A.

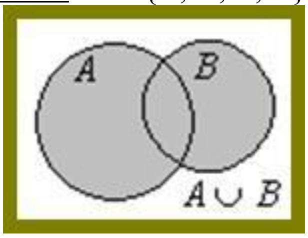
ПРИМЕР: A={0, 1, 2, 3}, B={0, 1}, $B \subset A$.



2) Объединением двух множеств называется множество, содержащее все элементы обоих множеств.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

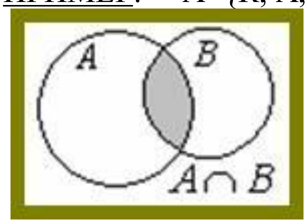
<u>ПРИМЕР</u>: А={К, А, Т, Я}, В={К, О, С, Т, Я}, $A \cup B = \{К, А, Т, Я, О, С\}$.



3) Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из общих элементов обоих множеств.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

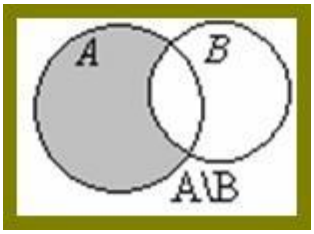
<u>ПРИМЕР</u>: А={К, А, Т, Я}, В={К, О, С, Т, Я}, $A \cap B$={К, Т, Я}.

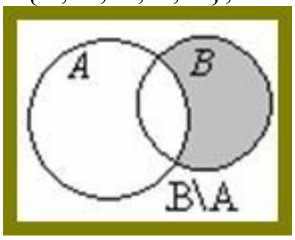


4) Разностью множеств А и В называется множество, состоящее из всех элементов множества А не содержащихся в В.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

<u>ПРИМЕР</u>: А={К, А, Т, Я}, В={К, О, С, Т, Я}, А \ В={А}, В \ А ={О, С}.

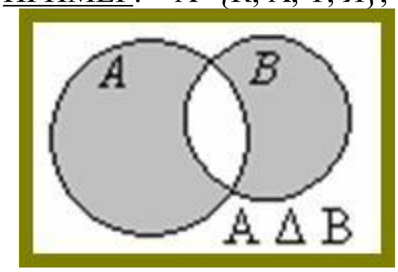




5) Симметрической разностью множеств А и В называется множество, состоящее из всех элементов множества А не содержащихся в В и всех элементов множества В не содержащихся в А.

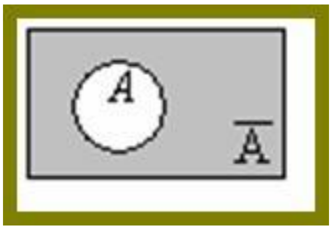
$$A \Delta B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

<u>ПРИМЕР</u>: А={К, А, Т, Я}, В={К, О, С, Т, Я}, А Δ В={А,О,С}.



6) Дополнением (дополнением до универсального множества) множества А называется множество, состоящее из всех элементов универсального множества не содержащихся в А.

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$



7) ***Прямым или декартовым произведением множеств*** *A* и *B*, называется множество всех упорядоченных пар (*a*, *b*), где первый элемент *a* из множества *A*, а второй элемент *b* из множества *B*.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

<u>ПРИМЕР</u>: $A = \{4,5,3\}$, $B = \{8,15,1,7\}$

$$A \times B = \{(4,8), (4,15), (4,1), (4,7), \{5,8\}, (5,15), (5,1), (5,7), (3,8), (3,15), (3,1), (3,7)\}$$

Степенью множества называется декартовое произведение множества *A* само на себя *n* раз.

$$A^n = \underbrace{A \times A \times A \times \ldots \times A}_{n}$$

<u>ПРИМЕР</u>

$A = \{3,1\}$, $A^2 = \{(3,3), (3,1), (1,3), (1,1)\}$.

Свойства операций над множествами

1) Коммутативность.

$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$

2) Ассоциативность.

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3) Дистрибутивность.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Мощность множества

Мощностью конечного множества называется число его элементов.

Мощность множества X обозначается: **| X |**

<u>ПРИМЕР</u>: X ={1,3,6}, | X | = 3

Тема 10. Отношения на множествах

Когда говорят о родстве двух человек, Маша и Саша, то подразумевают, что есть некая семья, к членам которой они относятся. Упорядоченная пара (Маша, Саша) отличается от других упорядоченных пар людей тем, что между Машей и Сашей есть некое родство (кузина, отец, и т. д.). В математике среди всех упорядоченных пар декартового произведения *A´B* двух множеств *A* и *B* тоже выделяются некоторые пары в связи с тем, что между их компонентами есть некоторые «родственные» отношения, которых нет у других.

В качестве примера рассмотрим множество *S* студентов какого-нибудь техникума и множество *D* изучаемых там дисциплин. В декартовом произведении *S´D*можно выделить большое подмножество упорядоченных пар (*s*, *d*), обладающих свойством: студент *s* изучает дисциплину *d*. Построенное подмножество отражает отношение «изучает», естественно возникающее между множествами студентов и дисциплин.

Для строгого математического описания любых связей между элементами двух множеств вводится понятие бинарного отношения, которое часто появляется как в математике, так и в информатике. Отношения между элементами нескольких множеств (*n*-арные отношения) применяются для описания простой системы управления базами данных.

Отношением (бинарным отношением, двуместным отношением) из множества А в множество В называется некоторое подмножество декартового произведения $A \times B$

Отношения в дальнейшем будем обозначать ρ $\rho \subset A \times B$ (читается ρ отношение из *A* в *B*)

Если $a \in A$, $b \in B$ и $\rho \in (a,b)$, то говорят, что *a* находится в отношении с *b*. Используется также запись $a \rho b$

ПРИМЕР: Если ρ отношение из *A* в *A* ($\rho \subset A^2$), то говорят ρ ***бинарное отношение на множестве А.***

ПРИМЕР:

$A = \{3,1\}$,

$A^2 = \{(3,3), (3,1), (1,3), (1,1)\}$,

$\rho = \{(3,3), (1,1)\}$.

n-арным отношением на множестве А, называется некоторое подмножество *n*-ой степени множества А.

ПРИМЕР $\rho \subset A^n$, ρ – *n*-арное отношение на множестве А.

Виды бинарных отношений на множестве А

1) Обратное отношение $\rho^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in \rho\}$.
2) Дополнение $\overline{\rho} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin \rho\}$.
3) Тождественные $I = \{(a,a) \mid a \in A\}$.
4) Универсальные $U = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in A\}$.

Композиция отношений

Пусть ρ_1 - отношение из *A* в *C*, $\rho_1 \subset A \times C$ и ρ_2 - отношение из *C* в *B*, $\rho_2 \subset C \times B$, тогда ***композицией*** отношений $\rho_1 \circ \rho_2$ называется отношение $\rho_1 \circ \rho_2 = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge (\exists c \in C \quad (a,c) \in \rho_1 \wedge (c,b) \in \rho_2)\}$.

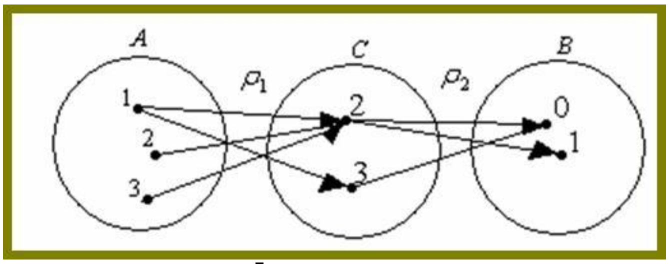
ПРИМЕР

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{0,1\}$, $C = \{2,3\}$.

$\rho_1 \subset A \times C$, $\rho_1 = \{(1,2), (1,3), (2,2), (3,2)\}$

$\rho_2 \subset C \times B$, $\rho_2 = \{(2,0), (2,1), (3,0)\}$

$\rho_1 \circ \rho_2 = \{(1,0), (2,0), (2,1), (3,0)\}$



Пусть $\rho \subset A \times B$ (ρ отношение из А в В). ***Ядром отношения*** ρ называется композиция отношения ρ и обратного для него отношения ρ^{-1}, т.е. $(\rho \circ \rho^{-1})$.

ПРИМЕР

Пусть А={0,1}, В={К, Л, О}, $\rho \subset A \times B$,*p*={(0,К),(0,Л),(1,К),(1,О)}. Найти ядро отношения ρ, т.е. $\rho \circ \rho^{-1}$.

Решение: Найдем обратное отношение ρ^{-1} ={(К,0),(Л,0),(К,1),(О,1)}.

Затем найдем композицию отношения ρ и обратного для него отношения ρ^{-1}: $\rho \circ \rho^{-1}$ = {(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)}

Тема 11. Числовые последовательности и их пределы.

Основные понятия и определения

Определение: Последовательностью называется функция, которая переводит множество натуральных чисел N в некоторое множество X : $\{x_n\} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1; x_2; \ldots; x_n; \ldots\}, x_i \in N$

Элемент x_1 называется первым членом последовательности, x_2 - вторым, ... , x_n - n-ым или общим членом последовательности.

Пример

Задание. Для последовательности $x_n = \{-1; 2; 5; 8; -3; 0; \ldots\}$ определить, чему равен третий член x_3

Решение. Третьим элементом последовательности будет элемент, идущий третьим по счету, то есть для заданной последовательности имеем, что $x_3 = 5$

Ответ. $x_3 = 5$

Задание последовательности формулой ее общего члена

Обычно последовательность целесообразнее задавать формулой ее общего члена, которая позволяет найти любой член последовательности, зная его номер.

Пример

Задание. Найти формулу общего члена последовательности $x_n = \{6; 20; 56; 144; 352; \ldots\}$

Решение. Запишем каждый член последовательности в следующем виде:

$n = 1 : x_1 = 6 = 2 \cdot 3 = 2^1 \cdot 3 = 2^1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)$

$n = 2 : x_2 = 20 = 4 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5 = 2^2 \cdot (2 \cdot 2 + 1)$

$n = 3 : x_3 = 56 = 8 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7 = 2^3 \cdot (2 \cdot 3 + 1)$

Как видим, члены последовательности представляют собой произведение степени двойки, умноженной на последовательные нечетные числа, причем два возводится в степень, которая равна номеру рассматриваемого элемента.

Таким образом, делаем вывод, что

$x_n = 2^n \cdot (2n + 1)$

Ответ. Формула общего члена: $x_n = 2^n \cdot (2n + 1)$

Пример

Задание. Найти 15 член последовательности, заданной формулой n-го члена: $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, n \in N$

Решение. Для того чтобы найти x_{15} , подставим в формулу общего члена значение $n = 15$. Получим:

$$x_{15} = \frac{(-1)^{15}}{15} = -\frac{1}{15}$$

Ответ. $x_{15} = \dfrac{(-1)^{15}}{15} = -\dfrac{1}{15}$

Пример

Задание. Проверить, являются ли числа $a = 6$ и $b = 1$ членами последовательности $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n^2 + 11}{n + 1}\right\}$

Решение. Число $a = 6$ является членом последовательности $\{x_n\}, n \in N$, если существует такой номер $n_0 \in N$, что $x_{n_0} = a = 6$:

$$6 = x_{n_0} = \frac{n_0^2+11}{n_0+1} \Rightarrow \frac{n_0^2+11}{n_0+1} = 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n_0^2 - 6n_0 + 5 = 0 \Rightarrow= \begin{cases} n_0 = 1 \\ n_0 = 5 \end{cases}$$

Таким образом, число $a = 6$ является первым и пятым членами заданной последовательности.

Проверим теперь, является ли число $b = 1$ членом указанной последовательности $\{x_n\} = \left\{\frac{n^2+11}{n+1}\right\}$. Рассуждая аналогично, как и для $a = 6$, получаем:

$$\frac{n_0^2+11}{n_0+1} = 1 \Rightarrow n_0^2 - n_0 + 10 = 0 \Rightarrow D = 1 - 40 = -39 < 0$$

Таким образом, уравнение $n_0^2 - n_0 + 10 = 0$ не имеет решение в натуральных числах, а значит, $b = 1$ не является членом последовательности $\{x_n\}$

Ответ. Число $a = 6$ является первым и пятым членами заданной последовательности, а $b = 1$ не является членом последовательности $\{x_n\} = \left\{\frac{n^2+11}{n+1}\right\}$

Предел последовательности

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, содержащий эту точку. δ — окрестностью точки x_0 $U_\delta(x_0)$ называется интервал длиной 2δ с центром в этой точке.

Определение предела последовательности: Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ такой, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n — a| <\varepsilon$

Число b называется пределом последовательности $\{x_n\}=x_1, x_2,..., x_n$ ($\lim \{x_n\} = b$; $n\to\infty$)

Последовательность $\{x_n\}$, имеющая конечный предел a, называется сходящейся. Последовательность, имеющая бесконечный предел или вообще не имеющая предела, называется расходящейся. Если у последовательности x_n **существует конечный предел** a , то она называется **сходящейся** (в частности, **бесконечно малой** при $a = 0$). В противном случае – **расходящейся**, при этом возможны два варианта: либо предела вовсе не существует, либо он бесконечен. В последнем случае последовательность называют **бесконечно большой**.

Пример: Последовательности $x_n = 2n, \quad y_n = 2n - 1$ являются *бесконечно большими*, поскольку их члены уверенным ходом продвигаются к «плюс бесконечности»:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (2n) = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (2n-1) = \infty$$

Пример 2.

Написать первые четыре члена последовательности и найти её предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{3n^2}$$

Это пример для самостоятельного решения. Для устранения неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$ в числителе потребуется применить формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$S = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$, где a_1 – первый, а a_n – энный член прогрессии.

Поскольку в пределах последовательностей «эн» всегда стремится к «плюс бесконечности», то неудивительно, что неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ – одна из самых популярных.

Тема 12. Функция и ее предел. Понятие функции. Способы задания функции

Функцией называется закон, по которому числу x из заданного множества X, поставлено в соответствие только одно число y, пишут $y = f(x)$, при этом x называют аргументом функции, y называют значением функции.

Существуют разные способы задания функций.

1. Аналитический способ.

Аналитический способ - это наиболее часто встречающийся способ задания функции. Заключается он в том, что функция задается формулой, устанавливающей, какие операции нужно произвести над x, чтобы найти y. Например $y = x^2 - 2$, $y = 3\ln x$, $y = \sin 2x$. Рассмотрим первый пример - $y = x^2 - 2$. Здесь значению x = 1 соответствует $y = 1^2 - 2 = -1$, значению x = 3 соответствует $y = 3^2 - 2 = 7$ и т. д. Функция может быть задана на разных частях множества X разными функциями.

Например:

$$y = \begin{cases} 3x, x \le 0, \\ 1, x > 0. \end{cases}$$

Во всех ранее приведенных примерах аналитического способа задания, функция была задана явно. То есть, справа стояла переменная y, а слева формула от переменной x. Однако, при аналитическом способе задания, функция может быть задана и неявно.

Например $y \cdot x + x + 1 = 0$, $\sin y + \cos x = 0.5$. Здесь, если мы задаем переменной x значение, то, чтобы найти значение переменной y (значение функции), мы должны решить уравнение. Например, для первой заданной функции при x = 3, будем решать уравнение: $y \cdot 3 + 3 + 1 = 0$, $y \cdot 3 + 4 = 0$, $y \cdot 3 = -4$, $y = -4/3$. То есть, значение функции при x = 3 равно -4/3.

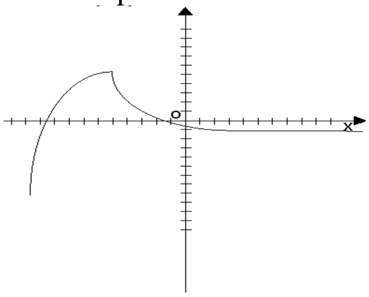
При аналитическом способе задания, функция может быть задана параметрически - это, когда x и y выражены через некоторый параметр t. Например,

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2. \end{cases}$$

Здесь при t = 2, x = 2, y = 4. То есть, значение функции при x = 2 равно 4.

2. Графический способ.

При графическом способе вводится прямоугольная система координат и в этой системе координат изображается множество точек с координатами (x,y). При этом $y = f(x)$. Пример:



3. Словесный способ.

Функция задается с помощью словесной формулировки. Классический пример – функция Дирихле. «Функция равна 1, если x – рациональное число; функция равна 0, если x – иррациональное число».

4. Табличный способ.

Табличный способ наиболее удобен, когда множество X конечно. При этом способе составляется таблица, в которой каждому элементу из множества X, ставится в соответствие число Y.

Пример:

X	3	5.1	10	12.5	13	20
Y	9	23	90	110	112	300

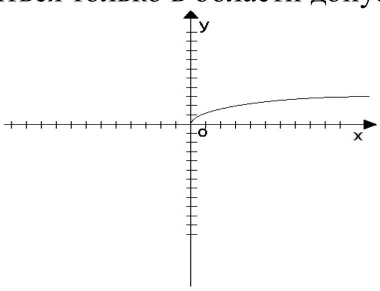
Табличный способ задания функции очень удобен при обработке результатов исследований. Например, при выявлении зависимости между уровнем загрязнения окружающей среды и количеству людей, заболевших раком.

Область определения

Областью определения функции $y = f(x)$ называется множество тех значений x, при которых функция определена. Иными словами, это те значения x, при которых функция «бывает». Иногда область определения задается непосредственно уже при задании функции. Например: $y = 3$ при $1 \leq x \leq 5$. Здесь областью определения (ОДЗ) является промежуток [1;5]. При других значениях x функция не определена. Однако, не всегда ОДЗ задана так непосредственно.

Чаще всего (для функций заданных аналитически), ОДЗ находят исходя из того, возможно ли при тех или иных значениях x произвести все операции, которые указаны в формуле.

Пример: ОДЗ функции $y = \sqrt{x}$ - промежуток [0;?). При всех других значениях x функция не определена (функции «не бывает»). Например, не существует действительного значения выражения $\sqrt{-2}$. При графическом изображении этой функции график будет находиться только в области допустимых значений, и ни на точку не выйдет за эти пределы.



При табличном способе задания функции областью допустимых значений являются только те значения x, которые заданы в таблице.

Например: Областью определения функции, заданной табличным способом

X	3	5.1	10	12.5	13	20
Y	9	23	90	110	112	300

является множество ОДЗ = {3;5.1;10;12.5;13;20}

Предел функции при $x \to x_0$

Пусть функция *f*(*x*) определена на некотором множестве *X* и пусть дана точка x_0. Возьмём из *X* последовательность точек, отличных от x_0:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$ (1)

сходящуюся к x_0. Значения функции в точках этой последовательности также образуют числовую последовательность

$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots,$ (2)

и можно ставить вопрос о существовании её предела.

Определение 1. Число *A* называется пределом функции *f*(*x*) в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любой сходящейся к x_0 последовательности (1) значений аргумента *x*, отличных от x_0, соответствующая последовательность (2) сходится к числу *A*.

Символически это записывается так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Пример 1. Найти предел функции $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ при $x \to 0$.

Решение. Подставляем вместо *x* значение 0. Получаем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = \frac{0 + 0 - 1}{0 - 1} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Итак, предел данной функции при $x \to 0$ равен 1.

Предел функции при $x \to \infty$, при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$

Кроме рассмотренного понятия предела функции при $x \to x_0$ существует также понятие предела функции при стремлении аргумента к бесконечности.

Определение 2. Число *A* называется пределом функции *f*(*x*) при $x \to \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности (1) значений аргумента соответствующая последовательность (2) значений функции сходится к *A*.

Символически это записывается так: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Определение 3. Число *A* называется пределом функции *f*(*x*) при $x \to -\infty$ ($x \to +\infty$), если для любой бесконечно большой последовательности значений аргумента, элементы x_n которой положительны (отрицательны), соответствующая последовательность (2) значений функции сходится к *A*.

Символически это записывается так: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ ($\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$).

Основные теоремы о пределах

Теорема 1. (о единственности предела функции). *Функция не может иметь более одного предела.*

Следствие. Если две функции *f*(*x*) и *g*(*x*) равны в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, может быть, самой точки x_0, то либо они имеют один и тот же предел при $x \to x_0$, либо обе не имеют предела в этой точке.

Теорема 2. *Если функции f(x) и g(x) имеют пределы в точке x_0, то:*

1) *предел алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме пределов слагаемых,* т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x);$$

2) *предел произведения функций равен произведению пределов сомножителей*, т.е.

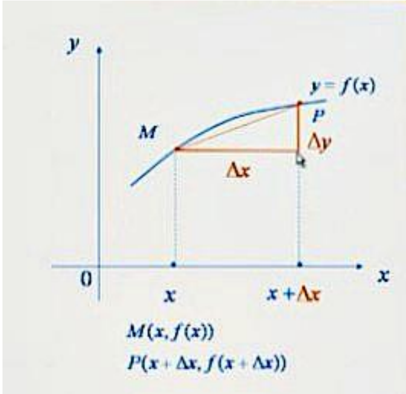
$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \bullet g(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \bullet \lim_{x \to x_0} g(x);$$

3)*предел частного двух функций равен частному от деления предела делимого на предел делителя, если предел делителя не равен нулю,* т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \quad \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0 \right).$$

Тема 13. Понятие производной функции и производная сложной функции. Определение производной

Пусть задана функция f(x) на интервале (a,b). Зафиксируем точку x внутри (a,b) и придадим x приращение Δx, MP секущая, приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$. Рассмотрим отношение



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ это тангенс угла наклона секущей MP, он зависит от Δx.

Определение. Производной называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента , когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

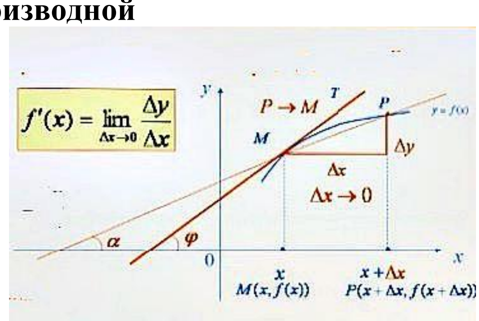
Существует несколько способов обозначения производной, самые важные это $f'(x)$ и y'_x.

Пример нахождения $f'(x)$, используя определение:

$$f(x) = x^2,\quad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\cdot\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = 2x+\Delta x;\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x;\quad f'(x) = (x^2)' = 2x$$

Геометрический смысл производной



По определению $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ устремим точку M к точке P , это эквивалентно стремлению $\Delta x \to 0$.

Предельное положение секущей MP это касательная к кривой в точке M , ее угловой коэффициент равен $k = tg\varphi = \lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Следовательно, <u>производная</u> в точке x равна тангенсу угла наклона касательной в этой точке.

Уравнение касательной в точке x_0 имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0),\ y_0 = f(x_0)$, т.к. $k = f'(x)$, то уравнение касательной примет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Найдем уравнение нормали, перпендикулярной данной касательной и проходящей через точку x_0. Из условия перпендикулярности прямых $k_1\cdot k_2 = -1$ угловой коэффициент нормали равен $-\frac{1}{f'(x_0)}$, а уравнение нормали в точке x_0 примет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Пример 1. Найти производную функции

$x+\sin x$.

Решение. Из правил дифференцирования выясняем, что производная суммы функций есть сумма производных функций, т. е.

$(x+\sin x)'=x'+(\sin x)'$.

Из таблицы производных выясняем, что производная "икса" равна единице, а производная синуса - косинусу. Подставляем эти значения в сумму производных и находим требуемую условием задачи производную:

$(x+\sin x)'=x'+(\sin x)'=1+\cos x$.

Пример 2. Найти производную функции

$5-7x$.

Решение. Дифференцируем как производную суммы, в которой второе слагаемое с постоянным множителем, его можно вынести за знак производной:

$(5-7x)'=5'+(-7)'=5'+(-7)x'=$

$=0+(-7)\bullet 1=-7$.

Если пока возникают вопросы, откуда что берётся, они, как правило, проясняются после ознакомления с таблицей производных и простейшими правилами дифференцирования. К ним мы и переходим прямо сейчас.

Таблица производных простых функций

1. Производная константы (числа). Любого числа (1, 2, 5, 200...), которое есть в выражении функции. Всегда равна нулю. Это очень важно помнить, так как требуется очень часто	$C'=0$
2. Производная независимой переменной. Чаще всего "икса". Всегда равна единице. Это тоже важно запомнить надолго	$x'=1$
3. Производная степени. В степень при решении задач нужно преобразовывать неквадратные корни.	$(x^n)'=nx^{n-1}$
4. Производная переменной в степени -1	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$
5. Производная квадратного корня	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
6. Производная синуса	$(\sin x)'=\cos x$
7. Производная косинуса	$(\cos x)'=-\sin x$
8. Производная тангенса	$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
9. Производная котангенса	$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
10. Производная арксинуса	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. Производная арккосинуса	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. Производная арктангенса	$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$
13. Производная арккотангенса	$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$
14. Производная натурального логарифма	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

15. Производная логарифмической функции	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
16. Производная экспоненты	$(e^x)' = e^x$
17. Производная показательной функции	$(a^x)' = a^x \ln a$

Правило 1. *Если функции* $u = f(x)$, $v = \varphi(x)$ *дифференцируемы в некоторой точке* x_0, *то в той же точке дифференцируемы и функции*

$u \pm v = f(x) \pm \varphi(x)$, *причём* $(u \pm v)' = u' \pm v'$

т.е. производная алгебраической суммы функций равна алгебраической сумме производных этих функций.

Следствие. *Если две дифференцируемые функции отличаются на постоянное слагаемое, то их производные равны*, т.е.

$(u + C)' = u'$

Правило 2. *Если функции* $u = f(x)$, $v = \varphi(x)$ *дифференцируемы в некоторой точке* x_0, *то в то же точке дифференцируемо и их произведение*

$u(x) \bullet v(x)$, *причём* $(uv)' = u'v + uv'$

т.е. производная произведения двух функций равна сумме произведений каждой из этих функций на производную другой.

Следствие 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной*:

$(Cu)' = C \bullet u'$

Следствие 2. *Производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждого из сомножителей на все остальные.*

Например, для трёх множителей:

$(uvw)' = u'vw + v'uw + w'uv$

Правило 3. *Если функции* $u = f(x)$, $v = \varphi(x)$ *дифференцируемы в некоторой точке* x_0 *и* $v(x_0) \neq 0$, *то в этой точке дифференцируемо и их частное u/v , причём*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + uv'}{v^2}$$

т.е. производная частного двух функций равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя на производную числителя и числителя на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего числителя.

Понятие производной сложной функции

Пусть *y* – **сложная функция** *x*, т.е. *y* = *f*(*u*), *u* = *g*(*x*), или

$y(x) = f[g(x)]$.

Если *g*(*x*) и *f*(*u*) – дифференцируемые функции своих аргументов соответственно в точках *x* и *u* = *g*(*x*), то сложная функция также дифференцируема в точке *x* и находится по формуле

$y'(x) = f'(u)g'(x)$

Пример 1.Найти производную функции

$s = (\sin x - 2\cos x)^3$

Сначала определим, где здесь "яблоко", то есть функция по промежуточному аргументу *u*, а где "фарш", то есть промежуточный аргумент *u* по независимой переменной *x*. Определяем: возведение в степень - это функция по промежуточному аргументу, то есть "яблоко", а выражение в скобках (разность двух тригонометрических функций) - это промежуточный аргумент, то есть "фарш".

Тогда $s' = \left(\left(\sin x - 2\cos x\right)^3\right)' = 3\left(\sin x - 2\cos x\right)^2 \bullet \left(\sin x - 2\cos x\right)'$.

Далее по таблице производных (производная суммы или разности, производные синуса и косинуса) находим:

$$\left(\sin x - 2\cos x\right)' = \left(\sin x\right)' - \left(2\cos x\right)' = \cos x - 2\left(\cos x\right) = \cos x - 2\left(-\sin x\right) =$$
$$= \cos x + 2\sin x.$$

Требуемая в условии задачи производная: $3\left(\sin x - 2\cos x\right)^2 \bullet \left(\cos x + 2\sin x\right)$.

Тема 18. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, который изучает задачи выбора и расположения элементов из некоторого основного множества в соответствии с заданными правилами. Формулы принципы комбинаторики используются в теории вероятностей для подсчета вероятности случайных событий и, соответственно, получения законов распределения случайных величин.

Это, в свою очередь, позволяет исследовать закономерности массовых случайных явлений, что является весьма важным для правильного понимания статистических закономерностей, проявляющихся в природе и технике.

Правила сложения и умножения в комбинаторике

Правило суммы. Если два действия А и В взаимно исключают друг друга, причем действие А можно выполнить m способами, а В – n способами, то выполнить одно любое из этих действий (либо А, либо В) можно n + m способами.

Пример 1. В классе учится 16 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно назначить одного дежурного?

Решение

Дежурным можно назначить либо мальчика, либо девочку, т.е. дежурным может быть любой из 16 мальчиков, либо любая из 10 девочек.

По правилу суммы получаем, что одного дежурного можно назначить 16+10=26 способами.

Правило произведения. Пусть требуется выполнить последовательно k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие n_2 способами, третье – n_3 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены:

$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Пример 2. В классе учится 16 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно назначить двух дежурных?

Решение

Первым дежурным можно назначить либо мальчика, либо девочку. Т.к. в классе учится 16 мальчиков и 10 девочек, то назначить первого дежурного можно 16+10=26 способами.

После того, как мы выбрали первого дежурного, второго мы можем выбрать из оставшихся 25 человек, т.е. 25-ю способами.

По теореме умножения двое дежурных могут быть выбраны 26*25=650 способами.

Сочетания без повторений. Сочетания с повторениями

Классической задачей комбинаторики является задача о числе сочетаний без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: *сколькими способами можно выбрать m из n различных предметов?*

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример 3. Необходимо выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся различных книг. Сколькими способами можно это сделать?

Решение

Нам из 10 книг нужно выбрать 4, причем порядок выбора не имеет значения. Таким образом, нужно найти число сочетаний из 10 элементов по 4:

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{6!\cdot 4!} = 210.$$

Рассмотрим задачу о числе сочетаний с повторениями: имеется по r одинаковых предметов каждого из n различных типов; *сколькими способами можно выбрать m ($m \le r$) из этих (n*r) предметов?*

$$\overline{C}_{n}^{m} = C_{n+m-1}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!}.$$

Размещения без повторений. Размещения с повторениями

Классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: *сколькими способами можно выбрать и разместить по m различным местам m из n различных предметов?*

$$A_{n}^{m} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример 5. В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить четыре фотографии. Сколькими способами можно это сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

Решение.

В данной задаче мы не просто выбираем фотографии, а размещаем их на определенных страницах газеты, причем каждая страница газеты должна содержать не более одной фотографии. Таким образом, задача сводится к классической задаче об определении числа размещений без повторений из 12 элементов по 4 элемента:

$$A_{12}^{4} = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12 = 11880.$$

Таким образом, 4 фотографии на 12 страницах можно расположить 11880 способами.

Также классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений с повторениями, содержание которой можно выразить вопросом: *сколькими способами можно выбрать и разместить по m различным местам m из n предметов, среди которых есть одинаковые?*

$$\overline{A}_{n}^{m} = n^{m}$$

Перестановки без повторений. Перестановки с повторениями

Классической задачей комбинаторики является задача о числе перестановок без повторения, содержание которой можно выразить вопросом: *сколькими способами можно разместить n различных предметов на n различных местах?*

$$P_{n} = n!$$

Пример 7. Сколько можно составить четырехбуквенных «слов» из букв слова«брак»?

Решение

Генеральной совокупностью являются 4 буквы слова «брак» (б, р, а, к). Число «слов» определяется перестановками этих 4 букв, т. е.

$$P_{4} = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$$

Для случая, когда среди выбираемых n элементов есть одинаковые (выборка с возвращением), задачу о числе перестановок с повторениями можно выразить вопросом: сколькими способами можно переставить n предметов, расположенных на n различных местах, если среди n предметов имеются k различных типов (k < n), т. е. есть одинаковые предметы.

$$\overline{P}_{n_1, n_2, \dots n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Тема 19. Основные понятия теории вероятностей, определение и свойства вероятностей.

Основные понятия теории вероятностей

Теория вероятностей объясняет и исследует различные закономерности, которым подчинены случайные события и случайные величины. Событием является любой факт, который можно констатировать в результате наблюдения или опыта. Наблюдением или опытом называют реализацию определенных условий, в которых событие может состояться.

Опыт означает, что упомянутый комплекс обстоятельств создан сознательно. В ходе наблюдения сам наблюдающий комплекс этих условий не создает и не влияет на него. Его создают или силы природы или другие люди.

Все события, за которыми люди наблюдают или сами создают их, делятся на:

- достоверные события;
- невозможные события;
- случайные события.

Достоверные события наступают всегда, когда создан определенный комплекс обстоятельств. Например, если работаем, то получаем за это вознаграждение, если сдали экзамены и выдержали конкурс, то достоверно можем рассчитывать на то, что включены в число студентов.

Невозможные события определенно не наступают, если создался определенный комплекс условий. Например, вода не замерзает, если температура составляет плюс 15 градусов по Цельсию, производство не ведется без электроэнергии.

Случайные события при реализации определенного комплекса условий могут наступить и могут не наступить. Например, если мы один раз подбрасываем монету, герб может выпасть, а может не выпасть, по лотерейному билету можно выиграть, а можно не выиграть, произведенное изделие может быть годным, а может быть бракованным. Появление бракованного изделия является случайным событием, более редким, чем производство годных изделий.

Ожидаемая частота наступления случайных событий тесно связана с понятием вероятности. Закономерности наступления и ненаступления случайных событий исследует теория вероятностей.

Если комплекс нужных условий реализован лишь один раз, то получаем недостаточно информации о случайном событии, поскольку оно может наступить, а может не наступить. Если комплекс условий реализован много раз, то появляются известные закономерности. Например, никогда невозможно узнать, какой кофейный аппарат в магазине потребует очередной покупатель, но если известны марки наиболее востребованных в течение длительного времени кофейных аппаратов, то на основе этих данных возможно организовать производство или поставки, чтобы удовлетворить спрос.

Знание закономерностей, которым подчинены массовые случайные события, позволяет прогнозировать, когда эти события наступят. Например, как уже ранее отмечено, заранее нельзя предусмотреть результат бросания монеты, но если монета брошена много раз, то можно предусмотреть выпадение герба. Ошибка может быть небольшой.

Методы теории вероятностей широко используются в различных отраслях естествознания, теоретической физике, геодезии, астрономии, теории автоматизированного управления, теории наблюдения ошибок, и во многих других теоретических и практических науках. Теория вероятностей широко используется в планировании и организации производства, анализе качества продукции, анализе технологических процессов, страховании, статистике населения, биологии, баллистике и других отраслях.

Случайные события обычно обозначают большими буквами латинского алфавита A, B, C и т.д.

Случайные события могут быть:

- несовместными;
- совместными.

События A, B, C … называют несовместными, если в результате одного испытания может наступить одно из этих событий, но невозможно наступление двух или более событий.

Если наступление одного случайного события не исключает наступление другого события, то такие события называют совместными. Например, если с ленты конвейера снимают очередную деталь и событие A означает «деталь соответствует стандарту», а событие B означает «деталь не соответствует стандарту», то A и B – несовместные события. Если событие C означает «взята деталь II сорта», то это событие совместно с событием A, но несовместно с событием B.

Если в каждом наблюдении (испытании) должно произойти одно и только одно из несовместных случайных событий, то эти события составляют полное множество (систему) событий.

Достоверным событием является наступление хотя бы одного события из полного множества событий.

Если события, образующие полное множество событий, попарно несовместны, то в результате наблюдения может наступить только одно из этих событий. Например, студент должен решить две задачи контрольной работы. Определенно произойдет одно и только одно из следующих событий:

- будет решена первая задача и не будет решена вторая задача;
- будет решена вторая задача и не будет решена первая задача;
- будут решены обе задачи;
- не будет решена ни одна из задач.

Эти события образуют полное множество несовместных событий.

Если полное множество событий состоит только из двух несовместных событий, то их называют взаимно противоположными или альтернативными событиями.

Событие, противоположное событию A, обозначают $\bar{A}$. Например, в случае одного подбрасывания монеты может выпасть номинал (A) или герб ($\bar{A}$).

События называют равновозможными, если ни у одного из них нет объективных преимуществ. Такие события также составляют полное множество событий. Это значит, что в результате наблюдения или испытания определенно должно наступить по меньшей мере одно из равновозможных событий.

Например, полную группу событий образуют выпадение номинала и герба при одном подбрасывании монеты, наличие на одной печатной странице текста 0, 1, 2, 3 и более 3 ошибок.

Классическое определение вероятности. Возможностью или благоприятным случаем называют случай, когда при реализации определённого комплекса обстоятельств события A происходят. Классическое определение вероятности предполагает напрямую вычислить число благоприятных случаев или возможностей.

Классическая и статистическая вероятности. Формулы вероятностей: классической и статистической

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятных этому событию возможностей к числу всех равновозможных несовместных событий N, которые могут произойти в результате одного испытания или наблюдения. Формула вероятности события A:

$$P(A) = \frac{M}{N}.$$

Тема 20. Действия над вероятностями

Сложение вероятностей несовместных событий

Необходимость в действиях над вероятностями наступает тогда, когда известны вероятности некоторых событий, а вычислить нужно вероятности других событий, которые связаны с данными событиями.

Сложение вероятностей используется тогда, когда нужно вычислить вероятность объединения или логической суммы случайных событий.

Сумму событий A и B обозначают A + B или A ∪ B. Суммой двух событий называется событие, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий. Это означает, что A + B – событие, которое наступает тогда и только тогда, когда при наблюдении произошло событие A или событие B, или одновременно A и B.

Если события A и B взаимно несовместны и их вероятности даны, то вероятность того, что в результате одного испытания произойдёт одно из этих событий, рассчитывают, используя сложение вероятностей.

Теорема сложения вероятностей. Вероятность того, что произойдёт одно из двух взаимно несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (3)$$

Например, на охоте произведены два выстрела. Событие A – попадание в утку с первого выстрела, событие B – попадание со второго выстрела, событие (A + B) – попадание с первого или второго выстрела или с двух выстрелов. Итак, если два события A и B – несовместные события, то A + B – наступление хотя бы одного из этих событий или двух событий.

Пример 1. В ящике 30 мячиков одинаковых размеров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Вычислить вероятность того, что не глядя будет взят цветной (не белый) мячик.

Решение. Примем, что событие A – «взят красный мячик», а событие B – «взят синий мячик». Тогда событие $A \cup B$ - «взят цветной (не белый) мячик». Найдём вероятность события A:

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

и события B:

$$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

События A и B – взаимно несовместные, так как если взят один мячик, то нельзя взять мячики разных цветов. Поэтому используем сложение вероятностей:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Теорема сложения вероятностей для нескольких несовместных событий. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ составляют полное множество событий, то сумма их вероятностей равна 1:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Сумма вероятностей противоположных событий также равна 1:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Противоположные события образуют полное множество событий, а вероятность полного множества событий равна 1.

Вероятности противоположных событий обычно обозначают малыми буквами p и q. В частности,

$$p + q = 1,$$

из чего следуют следующие формулы вероятности противоположных событий:

$p = 1 - q$ и $q = 1 - p$.

Пример 2. Цель в тире разделена на 3 зоны. Вероятность того что некий стрелок выстрелит в цель в первой зоне равна 0,15, во второй зоне – 0,23, в третьей зоне – 0,17. Найти вероятность того, что стрелок попадет в цель и вероятность того, что стрелок попадёт мимо цели.

Решение: Найдём вероятность того, что стрелок попадёт в цель:

$$p = 0,15 + 0,23 + 0,17 = 0,55.$$

Найдём вероятность того, что стрелок попадёт мимо цели:

$$q = 1 - 0,55 = 0,45.$$

Сложение вероятностей взаимно совместных событий

Два случайных события называются совместными, если наступление одного события не исключает наступления второго события в том же самом наблюдении. Например, при бросании игральной кости событием A считается выпадение числа 4, а событием B – выпадение чётного числа. Поскольку число 4 является чётным числом, эти два события совместимы. В практике встречаются задачи по расчёту вероятностей наступления одного из взаимно совместных событий.

Теорема сложения вероятностей для совместных событий. Вероятность того, что наступит одно из совместных событий, равна сумме вероятностей этих событий, из которой вычтена вероятность общего наступления обоих событий, то есть произведение вероятностей. Формула вероятностей совместных событий имеет следующий вид:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Поскольку события A и B совместимы, событие A + B наступает, если наступает одно из трёх возможных событий: $\overline{A}B, A\overline{B}$ или AB. Согласно теореме сложения несовместных событий, вычисляем так:

$$P(A+B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) - P(AB). \qquad (5)$$

Событие A наступит, если наступит одно из двух несовместных событий: $A\overline{B}$ или AB. Однако вероятность наступления одного события из нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей всех этих событий:

$$P(A) = P(A\overline{B}) + P(AB)$$

Поэтому

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) \qquad (6)$$

Аналогично:

$$P(B) = P(\overline{A}B) + P(AB)$$

Поэтому

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB). \qquad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в выражение (5), получаем формулу вероятности для совместных событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (8)$$

При использовании формулы (8) следует учитывать, что события A и B могут быть:

взаимно независимыми;

взаимно зависимыми.

Формула вероятности для взаимно независимых событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

Формула вероятности для взаимно зависимых событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P_A B.$$

Если события A и B несовместны, то их совпадение является невозможным случаем и, таким образом, P(AB) = 0. Четвёртая формула вероятности для несовместных событий такова:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Пример 3. На автогонках при заезде на первой автомашине вероятность победить $P_1 = 0,6$, при заезде на второй автомашине $P_2 = 0,9$. Найти:

вероятность того, что победят обе автомашины;
вероятность того, что победит хотя бы одна автомашина;
Решение.

1) Вероятность того, что победит первая автомашина, не зависит от результата второй автомашины, поэтому события A (победит первая автомашина) и B (победит вторая автомашина) – независимые события. Найдём вероятность того, что победят обе машины:

$P(AB) = 0,6 \times 0,9 = 0,54.$

2) Найдём вероятность того, что победит одна из двух автомашин:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) =$$
$$= 0,6 + 0,9 - 0,54 = 0,96.$$

Тема 21. Условная вероятность. Формула полной вероятности.

Формула полной вероятности и условные вероятности событий

Формула полной вероятности позволяет найти вероятность события A, которое может наступить только с каждым из n исключающих друг друга событий $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n$, образующих полную систему, если известны их вероятности $P(B_1),\ P(B_2),\ \ldots\ P(B_n)$, а условные вероятности события A относительно каждого из событий системы равны $P(B_1 \mid A),\ P(B_2 \mid A),\ \ldots\ P(B_n \mid A)$.

События $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n$ также называются гипотезами, они являются исключающими друг друга. Поэтому в литературе можно также встретить их обозначение не буквой B, а буквой H (hypothesis).

Для решения задач с такими условиями необходимо рассмотреть 3, 4, 5 или в общем случае n возможностей наступления события A - с каждым событий $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n$.

По теоремам сложения и умножения вероятностей получаем сумму произведений вероятности каждого из событий системы на условную вероятность события A относительно каждого из событий системы. То есть, вероятность события A может быть вычислена по формуле

$$P(A) =$$
$$= P(B_1) \times P(B_1 \mid A) +$$
$$+ P(B_2) \times P(B_2 \mid A) + \ \ldots\ +$$
$$+ P(B_n) \times P(B_n \mid A)$$

или в общем виде

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(B_i | A),$$

которая и называется формулой полной вероятности.

Формула полной вероятности: примеры решения задач

Пример 1. Имеются три одинаковых на вид урны: в первой 2 белых шара и 3 чёрных, во второй - 4 белых и один чёрный, в третьей - три белых шара. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из неё один шар. Пользуясь формулой полной вероятности, найти вероятность того, что этот шар будет белым.

Решение. Событие A - появление белого шара. Выдвигаем три гипотезы:

B_1 - выбрана первая урна;

B_2 - выбрана вторая урна;

B_3 - выбрана третья урна.

Вероятности этих гипотез (событий):

$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 1/3$.

Условные вероятности события А относительно каждой из гипотез:

$P(B_1 \mid A) = 2/5$, $P(B_2 \mid A) = 4/5$, $P(B_3 \mid A) = 1$.

Применяем формулу полной вероятности, в результате - требуемая вероятность:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{11}{15}.$$

Тема 22. Формула Байеса. Повторные испытания. Формула Бернулли

Формула Байеса: теория

Следствием правила умножения и формулы полной вероятности является формула Байеса, называемая также формулой гипотез.

Представим себе следующую ситуацию. До опыта о его условиях можно было сделать ряд гипотез $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (в литературе можно также встретить их обозначение не буквой В, а буквой Н), несовместных и образующих полную группу.

Вероятности гипотез до опыта (называемые также априорными вероятностями) заданы и равны

$P(A \mid B_1),\ P(A \mid B_2),\ \ldots,\ P(A \mid B_n)$.

Теперь предположим, что опыт произведён и в его результате появилось событие А.

Как нужно пересмотреть вероятности гипотез с учётом этого факта?

Формула Байеса позволяет найти вероятность каждой из гипотез о том, в результате какого из событий, образующих полную систему, наступило событие А (или как часто говорят, найти апостериорные вероятности).

Поэтому формула Байеса представляет собой отношение произведения вероятности одного из событий системы на условную вероятность этого события относительно соответствующего события системы к полной вероятности наступления события А с учётом всех событий системы.

То есть, по формуле Байеса вероятность, как и в самых простых случаях, вычисляется как отношение "одного ко всем":

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j) \times P(B_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j) \times P(B_j)}.$$

Видим, что знаменатель в этой формуле - ничто иное, как полная вероятность события А, а числители для каждого отдельного случая равны первому, второму, и так далее до n-го слагаемому суммы, находящейся в знаменателе. Формула Байеса может быть также записана в виде

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \cap B_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \cap B_j)}.$$

Формула Бернулли: теория

На этом уроке будем находить вероятность наступления события в независимых испытаниях при повторении испытаний. Испытания называются независимыми, если вероятность того или иного исхода каждого испытания не зависит от того, какие исходы имели другие испытания. Независимые испытания могут проводиться как в одинаковых условиях, так и в различных. В первом случае вероятность появления некоторого события во всех испытаниях одна и та же, во втором случае она меняется от испытания к испытанию.

Примеры независимых повторных испытаний:

выйдет из строя один из узлов прибора или два, три узла, причём выход из строя каждого узла не зависит от другого узла, а вероятность выхода из строя одного узла постоянна во всех испытаниях;

произведённая в некоторых постоянных технологических условиях деталь, или три, четыре, пять деталей, окажутся нестандартными, причём одна деталь может оказаться нестандартной независимо от любой другой детали и вероятность того, что деталь окажется нестандатной, постоянна во всех испытаниях;

из нескольких выстрелов по мишени один, три или четыре выстрела попадают в цель независимо от исходов других выстрелов и вероятность попадания в цель постоянна во всех испытаниях;

при опускании монеты автомат сработает правильно один, два или другое число раз независимо от того, какой результат имели другие опускания монеты, и вероятность того, что автомат сработает правильно, постоянна во всех испытаниях.

Эти события можно описать одной схемой. Каждое событие наступает в каждом испытании с одной и той же вероятностью, которая не изменяется, если становятся известными результаты предыдущих испытаний. Такие испытания называются независимыми, а схема называется схемой Бернулли. Предполагается, что такие испытания могут быть повторены как угодно большое количество раз.

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_{m,n}$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, находится по формуле Бернулли:

$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$ (где q = 1 – p - вероятность того, что событие не наступит)

или

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Поставим задачу – найти вероятность того, что событие такого типа в n независимых испытаниях наступит m раз.

Тема 23. Дискретная случайная величина и функция её распределения

Определение дискретной случайной величины и ряд её распределения

Случайной величиной называется переменная, которая может принимать те или иные значения в зависимости от различных обстоятельств, и в свою очередь, случайная величина называется ***дискретной***, если множество её значений конечно или счётно.

Кроме дискретных случайных величин существуют также непрерывные случайные величины.

Рассмотрим более подробно понятие случайной величины. На практике часто встречаются величины, которые могут принимать некоторые значения, но нельзя достоверно предсказать, какое именно значение каждая из них примет в рассматриваемом опыте, явлении, наблюдении. Например, число мальчиков, которые родятся в Москве в ближайший день, может быть различным. Оно может быть равным нулю (не родится ни одного мальчика: родятся все девочки или вообще не будет новорождённых), одному, двум и так далее до некоторого конечного числа *n*. К подобным величинам относятся: масса корнеплода сахарной свеклы на участке, дальность полёта артиллерийского снаряда, количество бракованных деталей в партии и так далее. Такие величины будем называть случайными. Они характеризуют все возможные результаты опыта или наблюдения с количественной стороны.

Примерами дискретных случайных величин с конечным числом значений могут служить число родившихся детей в течение дня в населённом пункте, число пассажиров автобуса, число пассажиров, перевезённых московским метро за сутки и т. п.

Число значений дискретной случайной величины может быть и бесконечным, но счётным множеством. Но в любом случае их можно в каком-то порядке пронумеровать, или, более точно - установить взаимно-однозначное соответствие между значениями случайной величины и натуральными числами 1, 2, 3, ..., *n*.

Внимание: новое, очень важное понятие теории вероятностей - ***закон распределения***. Пусть дискретная случайная величина *X* может принимать *n* значений: $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$. Будем считать, что они все различны (в противном случае одинаковые должны быть объединены) и расположены в возрастающем порядке. Для полной характеристики дискретной случайной величины **должны быть заданы не только все её значения, но и верояности** $p_i\left(i=1,\ 2,\ \dots,\ n\right)$, с которыми случайная величина принимает каждое из значений, т. е. $p_i=P\left(X=x_i\right)$.

Законом распределения дискретной случайной величины называется любое правило (функция, таблица) *p*(*x*), позволяющее находить вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной (например, вероятность того, что она пример какое-то значение или попадёт в какой-то интервал).

Наиболее просто и удобно закон распределения дискретной случайной величины задавать в виде следующей таблицы:

Значение	x_1	x_2	...	x_n
Вероятность	p_1	p_2	...	p_n

Такая таблица называется **рядом распределения дискретной случайной величины**. В верхней строке ряда распределения перечислены в порядке возрастания все возможные значения дискретной случайной величины (иксы), а в нижней - вероятности этих значений (*p*).

События $X=x_i\left(i=1,\ 2,\ \dots,\ n\right)$ являются несовместимыми и единственно возможными: они образуют полную систему событий. Поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$$p_1+p_2+\dots+p_n=\sum_{i=1}^{n}p_i=1.$$

Пример 1. В студенческой группе организована лотерея. Разыгрывается две вещи стоимостью по 1000 руб. и одна стоимостью по 3000 руб. Составить закон распределения суммы чистого выигрыша для студента, который приобрёл один билет за 100 руб. Всего продано 50 билетов.

Решение. Интересующая нас случайная величина *X* может принимать три значения: - 100 руб. (если студент не выиграет, а фактически проиграет 100 руб., уплаченные им за билет), 900 руб. и 2900 руб. (фактический выигрыш уменьшается на 100 руб. - на стоимость билета). Первому результату благоприятствуют 47 случаев из 50, второму - 2, а третьему - один. Поэтому их вероятности таковы:*P*(*X*=-100)=47/50=0,94, *P*(*X*=900)=2/50=0,04, *P*(*X*=2900)=1/50=0,02.

Закон распределения дискретной случайной величины *X* имеет вид

Сумма выигрыша	-100	900	2900
Вероятность	0,94	0,04	0,02

Функция распределения дискретной случайной величины: построение

Ряд распределения может быть построен только для дискретной случайной величины (для недискретной он не может быть построен хотя бы потому, что множество возможных значений такой случайной величины несчётно, их нельзя перечислить в верхней строке таблицы).

Наиболее общей формой закона распределения, пригодной для всех случайных величин (как дискретных, так и недискретных), является функция распределения.

Тема 25. Непрерывная случайная величина, функция распределения и плотность вероятности

Определение непрерывной случайной величины и её связь с вероятностью

Случайная величина называется непрерывной, если она может принимать любое значение из какого-либо ограниченного или неограниченного интервала. Для непрерывной случайной величины невозможно указать все возможные значения, поэтому обозначают интервалы этих значений, которые связаны с определёнными вероятностями.

Примерами непрерывных случайных величин могут служить: диаметр детали, обтачиваемой до заданного размера, рост человека, дальность полёта снаряда и др.

Так как для непрерывных случайных величин функция F(x), в отличие от дискретных случайных величин, нигде не имеет скачков, то вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю.

Это значит, что для непрерывной случайной величины бессмысленно говорить о распределении вероятностей между её значениями: каждое из них имеет нулевую вероятность. Однако в некотором смысле среди значений непрерывной случайной величины есть "более и менее вероятные". Например, вряд ли у кого-либо возникнет сомнение, что значение случайной величины - роста наугад встреченного человека - 170 см - более вероятно, чем 220 см, хотя и одно, и другое значение могут встретиться на практике.

Функция распределения непрерывной случайной величины и плотность вероятности

В качестве закона распределения, имеющего смысл только для непрерывных случайных величин, вводится понятие плотности распределения или плотности вероятности. Подойдём к нему путём сравнения смысла функции распределения для непрерывной случайной величины и для дискретной случайной величины.

Итак, функцией распределения случайной величины (как дискретной, так и непрерывной) или интегральной функцией называется функция $F(x) = P(X \le x)$, которая определяет вероятность, что значение случайной величины X меньше или равно граничному значению x.

Для дискретной случайной величины в точках её значений x_1, x_2, ..., x_i,...сосредоточены массы вероятностей p_1, p_2, ..., p_i,..., причём сумма всех масс равна 1. Перенесём эту интерпретацию на случай непрерывной случайной величины. Представим себе, что масса, равная 1, не сосредоточена в отдельных точках, а непрерывно "размазана" по оси абсцисс Ox с какой-то неравномерной плотностью. Вероятность попадания случайной величины на любой участок Δx будет интерпретироваться как масса, приходящаяся на этот участок, а средняя плотность на этом участке - как отношение массы к длине. Только что мы ввели важное понятие теории вероятностей: плотность распределения.

Плотностью вероятности f(x) непрерывной случайной величины называется производная её функции распределения:

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Зная функцию плотности, можно найти вероятность того, что значение непрерывной случайной величины принадлежит закрытому интервалу [a; b]:

$$F(b) - F(a) = P(X \le b) - P(X \le a) = P(a \le X \le b)$$

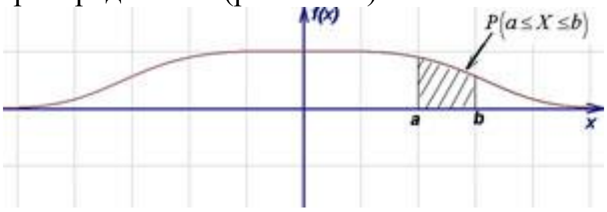
вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет какое-либо значение из интервала [a; b], равна определённому интегралу от её плотности вероятности в пределах от a до b:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx \quad \text{или} \quad F(a) = P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx.$$

При этом общая формула функции F(x) распределения вероятностей непрерывной случайной величины, которой можно пользоваться, если известна функция плотности f(x):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

График плотности вероятности непрерывной случайной величины называется её кривой распределения (рис. ниже).



Площадь фигуры (на рисунке заштрихована), ограниченной кривой, прямыми, проведёнными из точек a и b перпендикулярно оси абсцисс, и осью Ох, графически отображает вероятность того, что значение непрерывной случайной величины Хнаходится в пределах от a до b.

Тема 28. Характеристики выборки и генеральной совокупности

Основные понятия математической статистики

Математическая статистика – раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использованию статистических данных для научных и практических выводов. При этом статистическими данными называются сведения о числе объектов в какой-либо более или менее обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками.

Статистическая совокупность, из которой отбирают часть объектов, называется *генеральной совокупностью*. Множество объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности, называется *выборкой*. Число объектов N из генеральной совокупности и из выборки n называются соответственно объемом генеральной совокупности N и объемом выборки n.

Статистическое описание и вероятностные модели применяются к физическим, экономическим, социологическим, биологическим процессам, обладающим тем свойством, что хотя результат отдельного измерения физической величины X не может быть предсказан с достаточной точностью, но значение некоторой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от множества результатов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ повторных измерений может быть предсказан с существенно лучшей точностью. Такая функция называется статистикой. Часто точность предсказания некоторой статистики возрастает с возрастанием объема выборки.

Наиболее известные статистики – относительная частота, выборочные средние, дисперсия. Когда возрастает объем выборки n, многие выборочные статистики сходятся по вероятности к соответствующим параметрам теоретического распределения величины X. Поэтому каждую выборку рассматривают как выборку из теоретически бесконечной генеральной совокупности, распределение признака в которой совпадает с теоретическим распределением вероятности случайной величины. Во многих случаях теоретическая генеральная совокупность есть идеализация действительной совокупности, из которой получена выборка.

Различные значения наблюдаемого признака, встречающегося в совокупности, называются вариантами. Частоты вариантов выражают доли (удельные веса) элементов совокупности с одинаковыми значениями признака. ***Вариационным рядом*** называется ранжированный в порядке возрастания или убывания ряд вариантов с соответствующим им частотами.

Средние значения выборки

Значения, находящиеся в середине вариационного ряда, принято делить на собственно средние и структурные средние. Собственно среднее - это арифметическое среднее. Структурные средние - мода и медиана. Кроме того, чтобы охарактеризовать структуру вариационного ряда, используют квартили, квинтили, децили и процентили. Теперь обо всём по порядку.

Среднее арифметическое значение генеральной совокупности μ находят по формуле:

$$\mu = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_j}{N}, \qquad (1)$$

где

N - число единиц генеральной совокупности,

x_j - значение *j*-го наблюдения.

Если величина выборки *X* может принимать значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ с вероятностями соответственно $p_1, p_2, \dots, p_n$, то средним значением $\bar{x}$ величины *X* для выборки (её математическим ожиданием *E(x)* ,будет

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{или} \quad E(x) = \sum_j p_i x_i \quad \text{или же} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n} \qquad (2)$$

для негруппированных выборок и $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}$ (3)

для группированных выборок, где

n - число единиц выборки,

k - число классов,

x_i - значение *i*-го класса,

n_i - частота *i*-го класса.

Модой называют значение, которое в вариационном ряду встречается чаще других. Моду можно найти на гистограмме как самый высокий столбец.

Например, в выборке, значения которой 20, 50, 60, 70, 80, 20, 20, 75, 70, 20, 80, 20, 50, 60, модой является 20.

Медианой называют значение, которое находится в середине вариационного ряда. Первая половина элементов выборки меньше этого значения, а вторая половина - больше.

Если в выборке нечётное число элементов, то за медиану принимают собственно серединное значение. Например, в выборке, значения которой 14, 15, 18, 21, 27, медианой является 18.

Если в выборке чётное число элементов, то медиану находят, выбирая два значения, которые находятся в середине и вычисляя их среднее арифметическое. Например, есть выборка 11, 14, 15, 18, 21, 27. Медиану находят так: (15+18)/2 = 16,5.

Дисперсия выборки. Стандартное отклонение

Дисперсией величины называется среднее значение квадрата отклонения величины от её среднего значения. Дисперсию генеральной совокупности рассчитывают по формуле: $\sigma^2 = \frac{\sum_{j=1}^{N} (x_j - \mu)^2}{N}$.

Дисперсию выборки рассчитывают по формуле: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$ для негруппированных выборок и $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n \bullet (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ для группированных выборок.

Тема 30. Доверительный интервал для математического ожидания

Доверительный интервал для математического ожидания - это такой вычисленный по данным интервал, который с известной вероятностью содержит математическое ожидание генеральной совокупности. Естественной оценкой для математического ожидания является среднее арифметическое её наблюденных значений. Поэтому далее в течение урока мы будем пользоваться терминами "среднее", "среднее значение". В задачах рассчёта доверительного интервала чаще всего требуется ответ типа "Доверительный интервал [95%; 90%; 99%] среднего числа [величина в конкретной задаче] находится от [меньшее значение] до [большее значение]". С помощью доверительного интервала можно оценивать не только средние значения, но и удельный вес того или иного признака генеральной совокупности.

Точечная и интервальная оценки среднего значения

Если среднее значение генеральной совокупности оценивается числом (точкой), то за оценку неизвестной средней величины генеральной совокупности принимается конкретное среднее, которое рассчитано по выборке наблюдений. В таком случае значение среднего выборки - случайной величины $\overline{X}$ - не совпадает со средним значением генеральной совокупности. Поэтому, указывая среднее значение выборки, одновременно нужно указывать и ошибку выборки. В качестве меры ошибки выборки используется стандартная ошибка $s_{\overline{x}}$, которая выражена в тех же единицах измерения, что и среднее. Поэтому часто используется следующая запись: $\overline{x} \pm s_{\overline{x}}$.

Если оценку среднего требуется связать с определённой вероятностью, то интересующий параметр генеральной совокупности нужно оценивать не одним числом, а интервалом. Доверительным интервалом называют интервал, в котором с определённой вероятностью Р находится значение оцениваемого показателя генеральной совокупности. Доверительный интервал, в котором с вероятностьюР = 1 - α находится случайная величина $\overline{X}$, рассчитывается следующим образом:

$$\mu - z_\alpha \bullet \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \overline{X} \le \mu + z_\alpha \bullet \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где z_α - критическое значение стандартного нормального распределения для уровня значимости α = 1 - Р, которое можно найти в приложении к практически любой книге по статистике.

На практике среднее значение генеральной совокупности μ и дисперсия σ^2 не известны, поэтому дисперсия генеральной совокупности заменяется дисперсией выборки s^2, а среднее генеральной совокупности - средним значением выборки $\overline{x}$. Таким образом, доверительный интервал в большинстве случаев рассчитывается так:

$$\overline{x} - z_\alpha \bullet \frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{x} + z_\alpha \bullet \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Формулу доверительного интервала можно использовать для оценки среднего генеральной совокупности, если

известно стандартное отклонение генеральной совокупности;

или стандартное отклонение генеральной совокупности не известно, но объём выборки - больше 30.

Среднее значение выборки $\overline{x}$ является несмещённой оценкой среднего генеральной совокупности μ. В свою очередь, дисперсия выборки $s^2 = \frac{\sum\left(x-\overline{x}\right)^2}{n}$ не является несмещённой оценкой дисперсии генеральной совокупности σ^2. Для получения несмещённой оценки дисперсии генеральной совокупности в формуле дисперсии выборки объём выборки n следует заменить на n-1.

Точечная и интервальная оценки удельного веса

Удельный вес $\overline{p}$ некоторого признака выборки можно интерпретировать как точечную оценку удельного веса р этого же признака в генеральной совокупности. Если же эту величину нужно связать с вероятностью, то следует рассчитать доверительный интервал удельного веса р признака в генеральной совокупности с вероятностью Р = 1 - α:

$$\overline{p}-z_{\alpha}\bullet\sqrt{\frac{\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)}{n}}\leq p\leq\overline{p}+z_{\alpha}\bullet\sqrt{\frac{\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)}{n}}.$$

Тема 31. Проверка статистических гипотез: основные понятия и примеры

Статистические гипотезы: основные понятия. Шаги проверки гипотез

Статистическая гипотеза - это некоторое предположение о свойствах генеральной совокупности, которое необходимо проверить. Статистические гипотезы выдвигаются, когда необходимо проверить, является ли наблюдаемое явление элементом случайности или результатом воздействия некоторых мероприятий.

Например, необходимо выяснить, значительно ли отличается средний объём продаж после проведения рекламной кампании от среднего объёма продаж после проведения рекламной кампании. Если ответ на этот вопрос положителен, то можно сделать вывод о том, что изменения являются результатом рекламной кампании.

Выводы, полученные путём проверки статистических гипотез, носят вероятностный характер: они принимаются с некоторой вероятностью. Статистическая гипотеза может быть также предположением о свойствах двух совокупностей, если, например, в ходе мероприятий имело место воздействие только на одну совокупность и необходимо сделать вывод о том, было ли это воздействие результативным.

Шаги проверки статистических гипотез следующие:

- формулируется основная гипотеза $H0$ и альтернативная гипотеза $H1$;
- выбирается статистический критерий, с помощью которого будет проверяться гипотеза;
- задаётся значение уровня значимости α;
- находятся границы области принятия гипотезы;
- делается вывод о принятии или отвержении основной гипотезы $H0$.

Рассмотрим эти шаги и связанные с ними понятия подробнее.

Статистические гипотезы: основная и альтернативная

Основная гипотеза $H0$ - предположение о свойствах генеральной совокупности, которое является логичным и правдоподобным, но требует проверки. Основная гипотеза обладает "презумпцией невиновности", или точнее "презумпцией справедливости": пока не доказано, что её утверждение ложно, она считается истинной.

Альтернативная гипотеза $H1$ - утвержление о свойствах генеральной совокупности, которое принимается в случае, когда нет возможности принять основную гипотезу.

Приведём примеры того, как формулируются основная и альтернативная гипотезы.

Пример 1. До и после проведения рекламной кампании были собраны данные о среднем объём продаж.

Основная гипотеза $H0$: средний объём продаж до проведения рекламной кампании незначительно отличается от среднего объёма продаж после проведения рекламной кампании.

Альтернативная гипотеза $H1$: средний объём продаж изменился после проведения рекламной кампании.

Пример 2. После изменения конфигурации компьютерной сети были собраны случайным образом 200 замеров скорости передачи сообщений.

Основная гипотеза $H0$: изменение конфигурации не имело эффекта.

Альтернативная гипотеза $H1$: эффект от изменения статистически значим.

Статистические критерии для проверки гипотез

Статистический критерий - статистическая характеристика выборки, вычисляемая по некоторому математическому соотношению (формуле) на основе данных, имеющихся в выборке.

По значению этой характеристики принимается решение, принимать основную гипотезу или нет. Статистические критерии бывают двух видов:

- ***односторонний критерий*** - критерий, значения которого принадлежат области (0; +∞);
- ***двусторонний критерий*** - критерий, значения которого принадлежат области (-∞; +∞).

Свойства статистического критерия:

- статистический критерий является случайной величиной, закон распределения которой известен. Зачастую в названии статистического критерия упоминается его закон распределения. Например, критерий хи-квадрат-Пирсона подчиняется закону распределения хи-квадрат;
- чем ближе значение статистического критерия к нулю, тем более вероятно, что основная гипотеза является верной.

Уровень значимости α, ошибки первого и второго рода

Уровень значимости α - это вероятность ошибки первого рода. Значение уровня значимости обычно достаточно малое и задаётся аналитиком, проверяющим гипотезу. Чаще всего принимает значения 0,01 (1%), 0,05 (5%) и 0,1 (10%).

При проверке гипотезы всегда существует вероятность того, что будет сделано ошибочное заключение. Существуют два рода ошибки.

Ошибка первого рода - отвержение основной гипотезы при том, что она верна.

Ошибка второго рода - принятие основной гипотезы при том, что она ложна.

Со значением уровня значимости связано значение уровня доверия p.

Уровень доверия p - вероятность принятия верной гипотезы. Помним: пока не доказано, что основная гипотеза $H0$ является ложной, мы считаем её верной. Поэтому уровень значимости будет определять вероятность принятия основной гипотезы. Если уровень значимости α - вероятность отвержения верной гипотезы, то вероятность принятия верной гипотезы: $p = 1 - \alpha$.

Аналитик сам управляет ошибкой первого рода - задаёт вероятность её наступления. Ошибкой второго рода он управлять не может - всегда существует вероятность того, что может быть принята неверная гипотеза. Поэтому, чтобы избежать нежелательных последствий от принятия неверной гипотезы, основная гипотеза формулируется таким образом, чтобы риск от последствий принятия неверной гипотезы был минимальным.

Нахождение границ области принятия гипотезы

Область принятия гипотезы (ОПГ) - подмножество таких значений критерия, при которых основная гипотеза не может быть отвергнута. Область принятия гипотезы всегда включает в себя значение 0.

Критическая область - подмножество таких значений критерия, при которых основная гипотеза не может быть принята.

В случае, если используется односторонний критерий, ОПГ включает в себя подмножество положительных значений критерия. В таком случае у критерия есть только одна критическая область.

В случае, если используется двусторонний критерий, который может принимать как положительные, так и отрицательные значения, у него имеются две критические области: подмножество отрицательных и подмножество положительных значений критерия, при которых гипотеза не может быть принята.

На этом шаге требуется найти такое подмножество значений критерия, к которому значение выбранного критерия будет принадлежать с вероятностью p. Точнее, необходимо найти крайние значения критерия в этом подмножестве.

Поэтому процедура нахождения границ области принятия гипотезы сводится к решению следующей задачи:

$P\{R'<R<R''\}=1-\alpha$,

где

$P\{R'<R<R''\}$ -

вероятность того, что значения критерия принадлежат области принятия гипотезы,

R' и R'' -

левое и правое критические значения области принятия гипотезы (критические точки).

Из этого получаем:

$$P\{R\le R'\}=\frac{\alpha}{2}\quad F\{R'\}=\frac{\alpha}{2}\quad R'=F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\quad P\{R\le R''\}=1-\frac{\alpha}{2}\quad F\{R''\}=1-\frac{\alpha}{2}\quad R''=F^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

То есть задача решается путём взятия обратной функции от прямой функции распределения.

Обратным значением функции распределения с аргументом b $F^{-1}(b)=a$ является такое значение случайной величины a, при котором выполняется следующее условие:

$$F(a)=P\{x<a\}=b.$$

В таком случае a называется квантилью функции распределения уровня b. Если левая и правые границы области - 1/4 и 3/4, то квантиль называется квартилью, если левая и правая границы области представляют собой дроби со знаменателем 10, то квантили называются децилями.

В случае с односторонним критерием получаем следующую формулу для нахождения критической точки: $R'=F^{-1}(\alpha)$.

Вне зависимости от типа критерия для того, чтобы найти квантили функции распределения, которому подчиняется критерий, необходимо знать параметры этой функции (например, если критерий подчиняется нормальному закону, то его параметрами являются математическое ожидание и стандартное отклонение). Значение параметров оценивается на выборках.

5. Информационные и образовательные технологии

№ п/п	**Наименование раздела**	**Виды учебной работы**	**Формируемые компетенции (указывается код компетенции)**	**Информационные и образовательные технологии**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1.	*Линейная алгебра и геометрия*	*Лекция 1-8.* *Семинар 1-8.* *Самостоятельная работа*	*ОК-2.* *ОК-2* *ОК-2*	*Вводная лекция с использованием презентаций.* *Решение задач в on-line режиме на интернет-ресурсах.* *Подготовка к занятию с использованием электронного курса лекций*
2.	*Математический анализ*	*Лекция 9-17.* *Семинар 9-17.* *Самостоятельная работа*	*ОК-2.* *ОК-2* *ОК-2*	*Вводная лекция с использованием презентаций.* *Решение задач в on-line режиме на интернет-ресурсах.* *Подготовка к занятию с использованием электронно*

				го курса лекций
3.	*Теория вероятностей и математическая статистика*	*Лекция 18-34.* *Семинар 18-34.* *Самостоятельная работа*	*ОК-2.* *ОК-2* *ОК-2*	*Лекция-визуализация с применением слайд-проектора* *Индивидуальное решение задач в on-line режиме на интернет-ресурсах .* *Консультирование и проверка домашних заданий.*

6.Фонд оценочных средств для текущего, рубежного и итогового контролей по итогам освоения дисциплины (модулей)

6.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения дисциплины

№ п/п	***Контролируемые разделы дисциплины (модулей)***	***Код контролируемой компетенции (компетенций)***	***Наименование оценочного средства***
1.	*Линейная алгебра и геометрия*	*ОК-11*	*Устный опрос* *Контрольная работа* *Индивидуальные задания.*
2.	*Математический анализ*	*ОК-11*	*Устный опрос* *Контрольная работа* *Индивидуальные задания.*
3.	*Теория вероятностей и математическая статистика*	*ОК-11*	*Устный опрос* *Контрольная работа* *Индивидуальные задания* *Реферат, эссе.*

6.2. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Текущий контроль *осуществляется в виде опроса, участие в дискуссии на семинаре, выполнение самостоятельной работы и других видов работ, указанных в УМК, а также посещаемости студентов занятий - оценивается до 80 баллов.*

Рубежный контроль *(сдача модулей) проводится преподавателем и представляет собой письменный контроль по теоретическому и практическому материалу. Контрольные вопросы рубежного контроля включают полный объём материала части дисциплины (модулей), позволяющий оценить знания, обучающихся по изученному материалу и соответствовать УМК дисциплины, которое оценивается до 20 баллов.*

Итоговый контроль *(экзамен) знаний принимается по экзаменационным билетам, включающий теоретические вопросы и практическое задание, и оценивается до 20 баллов.*

Форма контроля	*Срок отчетности*	*Макс. количество баллов*	
		За одну работу	*Всего*
Текущий контроль: *- опрос*	*1, 2, 3, 4 недели*	*10 баллов*	*До 40 баллов*

- решение задач по пройденным темам *- посещаемость*	*3, 4, 5, 6, 7 недели* *1,2,3,4,5,6,7,8 недель*	*6 баллов* *0,2*	*До 30 баллов* *10 баллов*
Рубежный контроль: (сдача модуля)	*8 неделя*	*100%×0,2=20 баллов*	
Итого за I модуль			*До 100 баллов*

Форма контроля	*Срок отчетности*	*Макс. количество баллов*	
		За одну работу	*Всего*
Текущий контроль: *- опрос* *- решение задач по пройденным темам* *- посещаемость*	 *9, 10, 11, 12 недели* *13, 14, 15, 16, 17 недели* *9,10,11,12,13,14,15,16, 17 недели*	 *10 баллов* *6 баллов* *0,2*	 *До 40 баллов* *До 30 баллов* *10 баллов*
Рубежный контроль: (сдача модуля)	*16 неделя*	*100%×0,2=20 баллов*	
Итого за II модуль			*До 100 баллов*
Итоговый контроль *(экзамен)*	*Сессия*	*ИК = Бср × 0,8+Бэкз × 0,2*	

Выставляются баллы по результатам балльной системы в семестре экзаменационную оценку без сдачи экзамена, набравшим суммарное количество баллов, достаточное для выставления оценки от 55 и выше баллов – автоматически (при согласии студента).

Полученный совокупный результат (максимум 100 баллов) конвертируется в традиционную шкалу:

Рейтинговая оценка (баллов)	Оценка экзамена
От 0 - до 54	неудовлетворительно
от 55 - до 69 включительно	удовлетворительно
от 70 – до 84 включительно	хорошо
от 85 – до 100	отлично

6.3. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Текущий контроль (0 - 80 баллов)

При оценивании посещаемости, опроса и решение задач на практике учитываются:

- посещаемость (10 баллов)

- степень раскрытия содержания материала (20 баллов);

- изложение материала (грамотность речи, точность использования терминологии и символики, логическая последовательность изложения материала (20 баллов);

- знание теории изученных вопросов, сформированность и устойчивость используемых при решении задач умений и навыков (30 баллов).

Рубежный контроль (0 – 20 баллов)

Рубежный контроль – проверка полноты знаний, умений и навыков по материалу модуля в целом. Рубежный контроль осуществляется два раза в семестр на учебных занятиях согласно утвержденному графику проведения рубежного контроля. Рубежный контроль проводится в виде письменной работы и оценивается до 20 баллов.

При оценивании контрольной работы учитывается:

– студент безошибочно ответил на все вопросы, представленные в билете, а также найти метод решения поставленной задачи и решить задачу безошибочно – 18-20 баллов.

– студент должен безошибочно ответить на вопросы, представленные в билете, но при решении задачи допущены незначительные ошибки – 15-17 баллов.

– студент с ошибками ответил на вопросы, представленные в билете, при решении задачи допущены незначительные ошибки – 10-14 баллов.

– студент с ошибками ответил на вопросы, представленные в билете, при решении задачи допущены значительные ошибки – 5-9 баллов.

– студент продемонстрировал слабые знания при ответе на вопросы, сформулированные в билете, неправильно решил поставленную задачу - 1-4 баллов.

– студент не ответил ни на один вопрос из билета и не решил данную задачу 0 баллов.

- полнота выполненной работы (задание выполнено не полностью и/или допущены две и более ошибки или три и более неточности) – 1-10 баллов;

- обоснованность содержания и выводов работы (задание выполнено полностью, но обоснование содержания и выводов недостаточны, но рассуждения верны) – 1-15 баллов;

- работа выполнена полностью, в рассуждениях и обосновании нет пробелов или ошибок, возможна одна неточность – 1-20 баллов.

Итоговый контроль (экзаменационная сессия) - ИК = Бср × 0,8+Бэкз × 0,2

При проведении итогового контроля обучающийся должен ответить на 3 вопроса (1 вопрос теоретического характера и два вопроса практического характера).

При оценивании ответа на вопрос теоретического характера учитывается:

- теоретическое содержание не освоено, знание материала носит фрагментарный характер, наличие грубых ошибок в ответе (1-2 балла);

- теоретическое содержание освоено частично, допущено не более двух-трех недочетов (3-6 баллов);

- теоретическое содержание освоено почти полностью, допущено не более одного-двух недочетов, но обучающийся смог бы их исправить самостоятельно (6-8 баллов);

- теоретическое содержание освоено полностью, ответ построен по собственному плану (9-10 баллов).

При оценивании ответа на вопрос практического характера учитывается:

- ответ содержит менее 20% правильного решения (1-6 балла);

- ответ содержит 21-89 % правильного решения (6-15 баллов);

- ответ содержит 90% и более правильного решения (15-20 баллов).

6.4. Контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Раздел УМК включает образцы оценочных средств, примерные перечни вопросов и заданий в соответствии со структурой дисциплины и системой контроля.

Перечень вопросов:

1 модуль.

1. Что понимают под множеством?
2. Как называют объекты, из которых образовано множество?
3. Какое множество называют пустым?
4. Какие множества называют конечными и бесконечными?
5. В каком случае считают, что множество задано?
6. Укажите способы задания множеств.
7. В каком случае множество А является подмножеством множества В?

8. Какие подмножества называют собственными и несобственными?
9. Какие множества называют равными?
10. Сформулируйте свойство равенства множеств.
11. Какое множество называют пересечением, объединением, разностью множеств, дополнением одного множества до другого, дополнением множества до универсального?
12. Дайте определение декартова произведения множеств.
13. Перечислите способы задания декартова произведения множест
14. Дайте определение бинарного отношения на множестве X.
15. Как записать утверждение о том, что элементы x и y находятся в отношении R?
16. Перечислите способы задания отношений.
17. Дайте определение числовой последовательности.
18. Перечислите способы задания последовательностей.
19. Какие последовательности называют ограниченными?
20. Сформулируйте определения предела функции в точке, предела функции в бесконечности, предела последовательности.
21. Какая функция называется бесконечно малой и каковы ее основные свойства?
22. Какая функция называется бесконечно большой и какова ее связь с бесконечно малой?
23. Сформулируйте основные теоремы о пределах функций.
24. Как раскрываются неопределенности видов $\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [\infty - \infty], [0\,\infty]$.
25. Сформулируйте первый замечательный предел и его следствия.
26. Сформулируйте второй замечательный предел.
27. Сформулируйте определение производной.
28. Каков ее геометрический смысл?
29. Сформулируйте основные правила дифференцирования функций.

2 модуль

1. Случайные события, определение, классификация, вычисление вероятности события.
2. Совместные события
3. Классическое и статистическое определение вероятности
4. Вычисление вероятности.
5. Зависимые и независимые события.
6. Полная группа событий.
7. Операции над случайными событиями.
8. Формула полной вероятности.
9. Формула Байеса.
10. Вычисление наивероятнейшего числа наступления событий
11. Повторение испытаний, формула Бернулли.
12. Случайная величина, определение. Области определения и значений.
13. Классификация случайных величин.
14. Непрерывная случайная величина, закон распределения, числовые характеристики.
15. Дискретная случайная величина, ее характеристики.
16. Равномерное распределение случайной величины.
17. Нормальное распределение случайной величины.
18. Показательное распределение случайной величины.
19. Биномиальное распределение случайной величины
20. Числовые характеристики закона распределения случайной величины
21. Что изучает математическая статистика?
22. Что такое выборка?
23. Понятие статистического ряда, гистограммы, статистической функции распределения.
24. Статистические оценки параметров распределения дискретных случайных величин.
25. Доверительный интервал. Доверительная вероятность

26. Генеральная совокупность и выборка. Способы организации выборок. Вариационный ряд.
27. Эмпирическая функция распределения и ее свойства. Гистограмма. Полигон частот
28. Доверительный интервал для вероятности.
29. Общая задача проверки гипотез. Критическая область и область принятия решений.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

7.1.Список источников и литературы

- *источники (основные, дополнительные);*
- *литература (основная, дополнительная);*

Основная литература:

1. Грес, П.В. Математика для бакалавров. Универсальный курс для студентов гуманитарных направлений: Учебное пособие / П.В. Грес. - М.: Логос, 2015. - 288 с.
2. Дорофеева, А.В. Высшая математика для гуманитарных направлений: Учебник для бакалавров / А.В. Дорофеева. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 400 с.
3. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - М. : Юрайт, 2013
5. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт : ИД Юрайт, 2011.
6. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студентов вузов / Н. Ш. Кремер. - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012.
7. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи упражнения по теории вероятностей – Москва, КНОРУС, 2010 г.

Дополнительная литература:

1. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с.
3. Высшая математика: учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. – Москва: Флинта: МПСИ, 2010. – 359 с.

- *справочные и информационные издания.*

1. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимый для освоения дисциплины (модулей)

Интернет – ресурсы:

1. http://kyrlibnet.kg/ru/ec/
2. www.iprbookshop.ru
3. http://ilim.box/
4. https://www.who.int/hinari/en/
5. http://search.epnet.com/
6. https://www.cambridge.org/core
7. http://library.iuk.kg/ru/
8. www.math.by
9. www.webmath.ru
10. www.mathelp.spb.ru
11. www.ph4s.ru – сайт электронных книг по разделам математики
12. www.math24.biz – сайт решения задач on-line режиме

8. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся.

8.1. Планы практических (семинарских) и лабораторных занятий. Методические указания по организации и проведению

Тема 1. Матрицы и действия над ними. Определители и их свойства. Вычисление определителей (2 ч.)

Цель: Формировать навыки выполнения операций над матрицами: сложение, вычитание, умножение матрицы на число, произведение матриц; формировать умения находить определители матриц.

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Определение и виды матриц.
2. Основные действия над матрицами.
3. Применение матриц.

Контрольные вопросы:

1. Что называется матрицей?. Что называется матрицей-строкой, матрицей- столбцом?
2. Какие матрицы называются прямоугольными, квадратными.?
3. Какая матрица называется диагональной, единичной, треугольной?
4. Что называется суммой матриц? Что называется произведением матрицы на число?
5. Как найти произведение двух матриц?

Примеры выполнения задания:

Пример 1. **Даны матрицы:**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 5 & 6\\ -3 & 7\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -7 & 0\\ 2 & 5\end{pmatrix}.$$

Можно ли сложить матрицу *A*: с матрицей *B*; с матрицей *C*; с матрицей *D*?

Решение:

Матрицу *A* нельзя сложить с матрицей *B*, так как матрица *A* имеет размеры 3×2, матрица *B* - размеры 2×3, а складывать можно только матрицы одинаковых размеров. Матрицы *A* и *C* имеют одинаковые размеры, поэтому их можно складывать.
Матрицы *A* и *D* имеют одинаковые размеры, следовательно, их можно складывать.

Пример 2. **Найти *A+B* , если**

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 6 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A+B=\begin{pmatrix}0 & 7 & 0\\ -2 & 10 & 2\end{pmatrix}.$$

Так как матрицы имеют одинаковый размер, то их можно складывать. При сложении матриц надо сложить элементы, стоящие на одинаковых местах, т.е.

$$A+B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 6 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+1 & 0+7 & -2+2\\ -5+3 & 6+4 & -3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 7 & 0\\ -2 & 10 & 2\end{pmatrix}.$$

Пример 3. **Дано:**

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 4 & -1\\ 6 & 3 & 0 & 11\\ 7 & 8 & 1 & -3\end{bmatrix}.$$

Найти: -3*A*.

Решение:

$$-3A=\begin{bmatrix}-6 & -15 & -12 & 3\\ -18 & -9 & 0 & -33\\ -21 & -24 & -3 & 9\end{bmatrix}.$$

Для того, чтобы -3 умножить на матрицу *A* нужно каждый элемент матрицы *A* умножить на -3.

$$-3A=\begin{bmatrix}-3\cdot 2 & -3\cdot 5 & -3\cdot 4 & -3\cdot(-1)\\ -3\cdot 6 & -3\cdot 3 & -3\cdot 0 & -3\cdot 11\\ -3\cdot 7 & -3\cdot 8 & -3\cdot 1 & -3\cdot(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & -15 & -12 & 3\\ -18 & -9 & 0 & -33\\ -21 & -24 & -3 & 9\end{bmatrix}.$$

Пример 4. **Даны матрицы:**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 10\\ 4 & 2 & -2\\ 2 & 7 & 13\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 13 & 1 & 4\\ -5 & 2 & 5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & -5 & 2\\ 3 & -2 & 3\\ 0 & -1 & 6\end{pmatrix}.$$

Найти: *2A+B-3C*.

Решение:

$$2A+B-3C=\begin{pmatrix}-2 & 22 & 17\\ 12 & 11 & -9\\ -1 & 19 & 13\end{pmatrix}.$$

$$2A+B-3C=\begin{pmatrix}2 & 6 & 20\\ 8 & 4 & -4\\ 4 & 14 & 26\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 13 & 1 & 4\\ -5 & 2 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -15 & 6\\ 9 & -6 & 9\\ 0 & -3 & 18\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2-1-3 & 6+1-(-15) & 20+3-6\\ 8+13-9 & 4+1-(-6) & -4+4-9\\ 4-5-0 & 14+2-(-3) & 26+5-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 22 & 17\\ 12 & 11 & -9\\ -1 & 19 & 13\end{pmatrix}.$$

Задания к выполнению:

1. Транспонируйте матрицу $\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 7\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

2. Сложите матрицы А= $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 1\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}$ и В= $\begin{pmatrix}6 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}$

3. Найти произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 5\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

4. Найдите сумму:

А= $\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

5. Найдите матрицу 2A+5B

А= $\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

6. Найдите произведения AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

7. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}5 & 8 & 4\\ 3 & 2 & 5\\ 7 & 6 & 0\end{pmatrix}$.. какую матрицу B надо прибавить, чтобы получить единичную матрицу

8. Дано $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Найдите сумму A^2+A+E

Список источников и литературы:

- *литература (основная, дополнительная);*

Основная литература:

1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с

Дополнительная литература:

1. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

1. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

1. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.
2. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 3. Миноры и алгебраические дополнения.. Обратная матрица. (2 ч.)

Цель: Повторить определение определителя второго и третьего порядка, правило их вычисления. Закрепить на практике вычисление определителей.

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Определитель n-го порядка. Свойства определителей.
2. Вычисление определителя второго и третьего порядка.
3. Миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы.
4. Обратная матрица и способы ее нахождения.

Контрольные вопросы:

1. Что называется определителем 2 и 3 порядков?
2. Методы вычисления определителей 2 и 3 порядков.
3. Что называется алгебраическим дополнением?
4. Что такое минор?
5. Какими способами нужно найти обратную матрицу?

Примеры выполнения задания:

Пример 1. Найти определители матриц

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} и \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 5\cdot(-3) = 12 - (-15) = 27; \quad \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Пример 2.

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $\det(AB)$.

Решение:

1-й способ: $\det A = 4 - 6 = -2; \quad \det B = 15 - 2 = 13; \quad \det(AB) = \det A \cdot \det B = -26$.

2- й способ: $AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 1 & 1\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 1 & 3\cdot 2 + 4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}, \quad \det(AB) = 7\cdot 18 - 8\cdot 19 = 126 - 152 = -26$.

Пример 3.

Вычислить определитель по правилу треугольника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8 - 3\cdot 5\cdot 7 - 2\cdot 4\cdot 9 - 1\cdot 6\cdot 8 = 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0.$$

Задания к выполнению:

1. Решить уравнения, вычислив определители 2 порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2x-3 & 4 \\ -x & -3 \end{vmatrix} = 0$ б) $\begin{vmatrix} x+3 & x+1 \\ x-1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$

2. Вычислить определители правилом «треугольников»:

А) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

3. Вычислить определители, разложением по строке или столбцу:

А) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

4. Найдите x из уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; 3) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

5. Найти обратную матрицу:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Список источников и литературы:

- *литература (основная, дополнительная);*

Основная литература:

1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с

Дополнительная литература:

1. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

2. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

1. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.
2. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 4. Системы линейных алгебраических уравнений. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом (2 ч.)

Цель: формировать понятие о системе линейных алгебраических уравнения и навыки решения систем уравнений матричным методом.

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Система m линейных уравнений с n неизвестными.
2. Матричный метод решения системы уравнений.

Контрольные вопросы:

1. Как решить систему уравнения матричным методом?

Примеры выполнения задания:

Пример:

Найти решение системы уравнений: $\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+2y+3z=14 \\ 4x+3y+2z=16 \end{cases}$ матричным методом.

Решение:

1. Для данной системы составим матричное уравнение

$$AX=B, \text{ где } A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 46 \end{pmatrix}.$$

Значит $X=A^{-1}B$

2. Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}^T, A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij};$$

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix}5 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{vmatrix}=5(4-9)+1(2-12)-1(3-8)=-25-10+5=-30$$

.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5;\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-1;\quad A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=10;\ A_{22}=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=14;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-16;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-5;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}5 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-19;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=11;$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-30}\begin{pmatrix}-5 & 10 & -5\\ -1 & 14 & 19\\ -1 & -16 & 11\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15}\\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix};$$

3. Находим матрицу X.

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15}\\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 14\\ 46\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}0+\frac{14}{30}+\frac{16}{30}\\ -\frac{1}{3}0-\frac{98}{15}+\frac{128}{15}\\ \frac{1}{6}0+\frac{266}{30}-\frac{176}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

.

4. Итого решения системы: $x=1;\ y=2;\ z=3$.

Задания к выполнению:

1. Решить систему уравнения матричным методом:

а) $\begin{cases}5x_1+8x_2+x_3=2\\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7\\ 2x_1+x_2-x_3=-5\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=-7\\ x_1+4x_2+2x_3=-1\\ x_1-4x_2=-5\end{cases}$

2. Решить матричное уравнение.

$$\begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}\bullet X=\begin{pmatrix}7\\ 0\\ 5\end{pmatrix}$$

Список источников и литературы:

- *литература (основная, дополнительная);*

Основная литература:

1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с

Дополнительная литература:

2. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

3. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

3. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.
4. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 5-6. Методы решения системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера. Метод Гаусса.

Цель: формировать навыки решения систем уравнений методом Крамера и методом Гаусса.

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Решение системы линейных уравнений методом Крамера.
2. Алгоритм решения системы линейных уравнений методом Гаусса.

Контрольные вопросы:

1. Как преобразовать расширенную матрицу?
2. В чем заключается решение систем линейных уравнений методом Крамера?
3. Какой алгоритм решения систем линейных уравнений методом Гаусса?

Примеры выполнения задания:

Пример:

Найти решение системы уравнений: $\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+2y+3z=14 \\ 4x+3y+2z=16 \end{cases}$

1. *Метод Крамера*

1. Составим матрицу А данной системы:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Найдем определитель данной матрицы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}=5(4-9)+(2-12)-(3-8)=-25-10+5=-30$$

;

Определитель $|\Delta_1|$ получен из определителя $|\Delta|$ путем замены первого столбца столбцом свободных членов;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28-48)-(42-32) = -20-10 = -30$$
.

Определитель $|\Delta_2|$ получен из определителя $|\Delta|$ путем замены второго столбца столбцом свободных членов

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28-48)-(16-56) = -100+40 = -60$$
.

Определитель $|\Delta_3|$ получен из определителя $|\Delta|$ путем замены третьего столбца столбцом свободных членов

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32-42)+(16-56) = -50-40 = -90$$
.

1. Найдем решение системы

$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 1;\ x_2 = \Delta_2 / \Delta = 2;\ x_2 = \Delta_3 / \Delta = 3$

2. Метод Гаусса.

1. Составим расширенную матрицу системы:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{array}\right)$$

2. Пользуясь элементарными преобразованиями приводим данную матрицу к треугольному виду:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right)$$

3. Из полученной расширенной матрицы обратно составляем уравнения начиная снизу и находим значения неизвестных:

$6z = 18;\ z = 3$

$y + 2z = 8;\ y + 2 \cdot 3 = 8;\ y = 2$

$x + 2y + 3z = 14;\ x + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14;\ x = 1$

4. Итого решения системы: $x = 1;\ y = 2;\ z = 3$.

Задания к выполнению:

3. Решить систему уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x - y + 2z = -3; \\ x + 2y - z = 4; \\ 3x + y - 3z = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 10x + y + 4z = 1; \\ x - 2y - 7z = -3; \\ 2x + y + 5z = 0. \end{cases}$

4. Решить систему уравнения методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 4x + y - 2z = 10; \\ -x + 3y - z = -1; \\ 3x - y + 5z = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + y - 2z = 5; \\ 10x + y + z = 0; \\ x - y + z = -11. \end{cases}$

Список источников и литературы:
- *литература (основная, дополнительная);*

Основная литература:
1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с

Дополнительная литература:

3. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

4. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

5. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.
6. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 9. Основные понятия теории множеств. Операции над множествами. Отношения на множествах (2ч.)

Цель: Усвоить понятие «множество» и формирование умений задавать множество различными способами. Формирование умений производить операции над множествами. Усвоить понятия «упорядоченные пары, декартово произведение, бинарные отношения». Научиться строить бинарные отношения внутри множества или между двумя множествами

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Обозначение множеств. Принадлежность элемента множеству. Пустое множество.
2. Объединение, пересечение, сравнение, разность множеств.
3. Декартовое произведение множеств.
4. Мощность множества. Бинарное отношение на множествах. Композиция отношений

Контрольные вопросы:

1. Какое множество называется универсальным?
2. Дайте определение объединения, пересечения, разности множеств.
3. Изобразите операции над множествами с помощью кругов Эйлера.
4. Дайте определение декартова произведения, бинарного отношения на множестве X.
5. Перечислите способы задания отношений

Примеры выполнения задания:

Пример 1. Задать три множества A, B, C из строчных букв русского алфавита. Сравнить их между собой.

Решение. Задаем три множества A, B, C. Множество A={а, б, с, д}; B={а, б, с, д, к, м}; C={а, б, с, д, с, м, б, а, к}. Множество A является подмножеством множеств B и C. Множество C равно множеству B, так как состоит из одних элементов.

Пример 2. Заданы три множества X,Y, Z. Множества равны: X{9,1,5}; Y={2 , 5 , 1, 7, 9}; Z={1, 2, 9, 1, 5, 2, 7, 5, 7}. Сравнить их между собой.

Решение. Множество X является подмножеством множеств Y и Z, так как все элементы множества X входят как в множество Y, так и в Z. Множество Z равно множеству Y, так как они состоят из одних и тех же элементов.

Пример 3. Записать множество $A=\{x|x\in Z\wedge x2<10\}$ перечислением элементов.

Решение. Множество A задано с помощью характеристического условия. Характеристическое условие в данном случае выражено записью "$x \in Z \wedge x^2 < 10$" (знак "$\wedge$" означает "и"). Расшифровывается эта запись так: "x – целое число, и $x^2<10$". Иными словами, в множество A должны входить лишь целые числа, квадрат которых меньше 10. Таких чисел всего 7, т.е. $A=\{0,-1,1,-2,2,-3,3\}$. Множество A теперь задано с помощью перечисления элементов.

Ответ: $A=\{0,-1,1,-2,2,-3,3\}$.

Задания к выполнению:

1. **Задайте множество другим способом** (если это возможно):

а) $A = \{x| x \in N, x \le 9\}$; б) $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; в) $A = \{x| x \in R, x^2 - 3 = 0\}$.

Ответы: а) Элементами множества A являются натуральные числа, которые меньше 9 и само число 9, значит, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

б) $A = \{x| x \in Z, |x| \le 4\}$ – множество целых чисел, модуль которых не больше четырех;

в) Элементами множества A являются корни уравнения $x^2 - 3 = 0$, значит, A = {- 3 , 3 }.

2. Задайте числовое множество описанием характеристического свойства элементов:

а) (0; 11); б) [-12,3; 1,1); в) [-5; 3]; г) (- ∞; -102,354].

Ответы: а) $A = \{x| x \in R, 0 < x < 11\}$; б) $C = \{x| x \in R, -12,3 \le x < 1,1\}$;

в) $A = \{x| x \in R, -5 \le x \le 3\}$; г) $P = \{x| x \in R, x \le -102,354\}$.

Задайте перечислением множество B = {x: x2 − 2x + 1 = 0}. Это стандартная запись для задания множества, читается она так: множество элементов x таких, что x2 − 2x + 1 = 0.

Ответ. B = {1}.

Определите множество A натуральных чисел, меньших 1/2.

Ответ. A = ∅

3. Определите множество значений x, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $x^2 \le 9$ Ответ: [-3; 3] б) $(x^2 + 1) \le 17$ Ответ: [-4; 4] в) $x^2 - 2x + 5 < 0$ Ответ: ∅

6. Записать все элементы множества чисел, которые делятся на 10

Ответ: {x| x – делятся на 10} .

7. Решив неравенство, записать его решения в виде числового промежутка:

а) {x2|x2+1>0}{x2|x2+1>0} ответ: (−∞;+∞)(−∞;+∞)

б) {x|1/x<0}{x|1/x<0} ответ: (−∞;0)(−∞;0).

в) {x|x2+7x+12<0}{x|x2+7x+12<0} ответ: (-4; -3).

8. Сколько существует подмножеств множества A={1, 2, 3}.

Ответы: {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}.

9. Даны множества:

а) $K = \{y| y = 1$, если $y \in N$, то $y + 1 \in N\}$, $У = \{y| y \in Z, y > 0\}$;

б) K = Ø, У = {Ø};

в) K = {с, п, р}, У = {{с, п}, р }. Равны ли множества K и У?

ответы:

а) Данные множества равны (K=У), т.к. любой элемент y из множества K принадлежит и множеству У, и, наоборот, любой элемент y из множества У принадлежит множеству K;

б) Нет не равны, т.к. множество K пустое, а множество У состоит из одного элемента (пустого множества);

в) Нет не равны, т.к. множество K состоит из трех элементов, а множество У – из двух. Причем два элемента из множества K (с и п) не принадлежат множеству У, а элемент из множества У (множество {с, п}) не принадлежит множеству K.

10. X – множество млекопитающих, H = {львы, тигры, волки, лисы}, M = {медведи, волки, орлы, страусы, обезьяны, киты}. Какие из данных множеств являются подмножеством множества X?

Ответ: Множество M не является подмножеством множества X, т.к. орлы и страусы – птицы, а не млекопитающие.

Список источников и литературы:

- *литература (основная, дополнительная);*

Основная литература:

1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с

Дополнительная литература:

4. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

5. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

7. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.
8. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Примеры выполнения задания:

Пример 1. Найдем пересечение множеств A = {a, b, c, d, e} и B = {b, d, e, g, к}.

Решение: Обоим множествам принадлежат элементы b, d, e. Поэтому $A \cap B = \{b, d, e\}$.

Пример 2. Найдем объединение и разность множеств A и B, если $A = \{ x| \ -2/5 \le x \le 7/3\}$, $B = \{ x| \ -1/4 \le x \le 3\}$.

Решение. Если изобразить данные множества на числовой прямой, то объединение $A\cup B$ есть часть оси, где имеется хотя бы одна штриховка, т.е. отрезок [-2/5; 3]. Иначе говоря, $A\cup B = \{ x| \ -2/5 \le x \le 3\}$. Разность A\B есть часть отрезка, изображающего множество A, отмеченная лишь одной штриховко, т.е. полуинтервал [-2/5; -1/4), точка -1/4 принадлежит B и поэтому не принадлежит A\B. Другими словами, $A\backslash B = \{ x| \ -2/5 \le x < -1/4\}$.

Пример 3. Известно, что A – множество учащихся, увлекающихся историей, B – множество учащихся, интересующихся биологией. Сформулируйте условия, при которых: а) $A\cup B= B$; б) $A \cap B = \varnothing$.

Решение: а) выясним, в каком отношении находятся множества A и B. Известно, что $A\cup B= B$, в том случае, когда $A\subset B$, т.е. все элементы множества A являются также и элементами множества B. Таким образом, $A\cup B= B$, если все учащиеся, увлекающиеся историей, увлекаются и биологией;

б) Исходя из равенства $A\cap B = \varnothing$ множества A и B не пересекаются, т.е. они не имеют общих элементов. Поэтому $A\cap B = \varnothing$, если все учащиеся, увлекающиеся историей, не интересуются биологией.

Задания к выполнению:

1. Пусть U = {0,1, 2, 3, 7, 9}, $A = \{x|x^3 - 4x^2 + 3x = 0\}$, B = {1, 7}, C = {2, 7}.

Найдите: $A\cap B$, $A\cup C$, C , A\C , $A\Delta C$, $B \cap C \cup A\cap B \cup B \cap C$.

Ответ. Множество A задано характеристическим свойством. Чтобы ответить на поставленные вопросы задачи, необходимо множество A задать списком. Корнями кубического уравнения $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$ являются числа 0 , 1 , 3, поэтому A = {0,1, 3}. Выполним указанные в условии задачи операции над множествами A, B , C согласно определениям этих операций:

$A\cap B = \{0, 1, 3\}\cap\{1, 7\}= \{1\}$; $A\cup C = \{0, 1, 3\}\cup\{2, 7\}= \{0, 1, 2, 3, 7\}$; $C = U \setminus C = \{0, 1, 2, 3, 7, 9\}\setminus \{2, 7\}= \{0, 1, 3, 9\}$; $A \setminus C = \{0, 1, 3\}\setminus \{2, 7\}= \{0, 1, 3\}$; $C \setminus A = \{2, 7\}\setminus \{0, 1, 3\}= \{2, 7\}$; $A\Delta C = A \setminus C \cup C \setminus A = \{0, 1, 3\}\cup\{2, 7\}= \{0, 1, 2, 3, 7\}$; $B \cap C = \{1, 7\}\cap\{0, 1, 3, 9\}= \{1\}$; $B \cap$Ñ $= \{1, 7\}\cap\{2, 7\}= \{7\}$; $A\cap B = U \setminus (A\cap B) = \{0,1, 2, 3, 7, 9\}\setminus \{1\}= \{0, 2, 3, 7, 9\}$; $B\cap C \cup A\cap B\cup B\cap C = \{1\}\cup\{0, 2, 3, 7, 9\}\cup\{7\}= \{0,1, 2, 3, 7, 9\}=U$

2. Построить диаграмму Венна, иллюстрирующую множество $M = (A \cap B)\cup (C \setminus B)$. Ответ. Построение диаграммы проведем поэтапно:

1) на рисунке 1 заштриховано множество $A \cap B$;
2) на рисунке 2 заштриховано множество $C \setminus B$;
3) на рисунке 3 заштриховано множество $M = (A \cap B)\cup (C \setminus B)$.

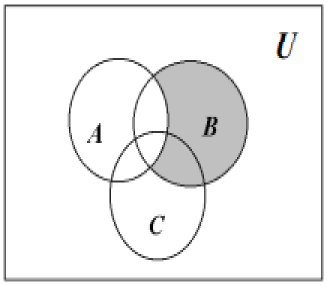


Рис. 1

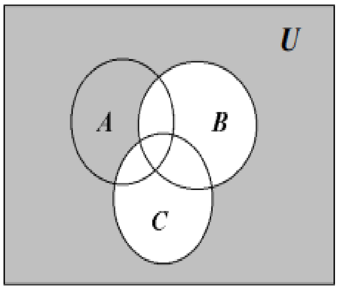


Рис. 2

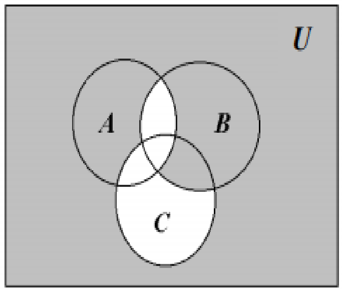


Рис. 3

3. Составить множество ***A*** из букв фамилии, множество ***B*** – из букв имени, множество ***C*** – из букв отчества (повторяющиеся элементы удалить). Найти: объединение множеств ***A***, ***B*** и ***C***, пересечение множеств ***A***, ***B*** и ***C***, разность ***A\B***, разность ***B\A***, симметрическую разность множеств ***A*** и ***B***.

4. Какие из нижеследующих множеств геометрических фигур на плоскости равны между собой, если: A – множество всех квадратов, B – множество всех прямоугольников, C – множество всех четырехугольников с прямыми углами, D – множество всех прямоугольников с равными сторонами, F – множество всех ромбов с прямыми углами.
Ответ: A=D=F; B=C.

5. Для каждого из слов: «сосна», «осколок», «насос», «колос» составьте множество его различных букв. Имеются ли среди них равные?
Ответ: A={с, о, н, а}, B={о, с, к, л}, C={н, а, с, о}, D={к, о, л,с}, A=C, B=D.

6. Даны множества: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 6, 9\}$. Найти: $A\cup B$, $A\cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A\Delta B$. (см. пример П.1)

7. Даны множества: $A =\{x \mid 0 \le x \le 7\}$, $B = \{x|(x-6)(x^2+6x+9)=0\}$. Найти: $A\cup B$, $A\cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A\Delta B$.

8. Даны множества: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x|(x^2-6x+8)=0$. Найти: $A\cup B$, $A\cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A\Delta B$.

9. Доказать справедливость равенств $(A\cap B)'=A'\cup B'(A\cap B)'=A'\cup B'$

Доказательство. $x\in(A\cap B)'\Leftrightarrow x\notin(A\cap B)\Leftrightarrow x\notin A\vee x\notin B\Leftrightarrow x\in(A\cap B)'\Leftrightarrow x\notin(A\cap B)\Leftrightarrow x\notin A\vee x\notin B\Leftrightarrow x\in A'\vee x\in B'\Leftrightarrow x\in A'\vee x\in B'\Leftrightarrow x\in(A'\cup B')\Leftrightarrow(A\cap B)'=A'\cup B'$.

Список источников и литературы:

- *литература (основная, дополнительная);*

Основная литература:

1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с

Дополнительная литература:

1. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

1. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

1. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.
2. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия.

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 10. Отношения на множествах.

Примеры выполнения задания:

Пример 1. Отношение задано неравенством: $5x- 7y < 0$. Построить любое множество Z из упорядоченных пар. Выбрать из множества Z упорядоченные пары с бинарным отношением между элементами, удовлетворяющим заданному неравенству, и переписать их в другое множество.

*Решение***.** Новое множество Z из упорядоченных пар с бинарным отношением между элементами может быть любым, но обязательно должно содержать несколько упорядоченных пар с бинарным отношением между элементами, удовлетворяющим заданному неравенству. Например. $Z=\{(0,0),(1,0),(-1,1),(1,1),(1,-1),(0,1)\}$.

Выбирают из множества Z пары так, чтобы при подстановке в заданное неравенство оно выполнялось. Новое множество получилось в виде:
$R=\{\{-1,1\},\{1,1\},\{0,1\}\}$. Все упорядоченные пары во множестве R удовлетворяют заданному отношению.

Вывод. Бинарное отношение ρ равно множеству R и включено во множество Z: $\rho =R\subset Z$.

Пример 2. (Декартово произведение на одном множестве $X \times X$.) Пусть на множестве $X=\{3, 5, 7\}$ задано отношение «меньше» (т.е. первый элемент меньше второго, второй меньше третьего). Записать декартово произведение $X\times X$. Из этого множества следует выбрать элементы, которые должны удовлетворять отношению «меньше».

*Решение***.** Декартово произведение $X \times X$ может быть записано в виде множества из упорядоченных пар: $X \times X= \{(3;3),(3;5),(3;7),(5;3),(5;5),(5;7),(7;3),(7;5),(7;7)\}$.
Из этого множества выбираются элементы, которые удовлетворяют отношению «меньше». В результате получится новое множество из упорядоченных пар:
$W=\{(3;5),(3;7),(5;7)\}$.

В новом множестве все пары являются элементами декартова произведения $X\times X$. Отношение «меньше» на множестве X является подмножеством декартова произведения $X\times X$. Бинарное отношение на множестве X есть подмножество декартова произведения $W\subset X\times X$.

Пример 3. (Декартово произведение двух множеств $X \times Y$.)
Пусть заданы два множества: $X= \{2, 6, 1\}$, $Y= \{7, 4, 8\}$. Записать декартово произведение $X \times Y$.

*Решение***.** Декартово произведение двух множеств равно:
$X \times Y=\{(2, 7), (2, 4), (2, 8), (6, 7), (6, 4), (6, 8), (1, 7), (1, 4), (1, 8)\}$.

Пример 4. Определите свойства следующих отношений:
1. «прямая x пересекает прямую y» (на множестве прямых)
2. «число x больше числа y на 2» (на множестве натуральных чисел)
3. «число x делится на число y без остатка» (на множестве натуральных чисел)
4. «x – сестра y» (на множестве людей).

Решение: 1. xRy=«прямая x пересекает прямую y» (на множестве прямых). Это отношение: Рефлексивное, так как «прямая x пересекает прямую x» выполняется для любой прямой (она пересекает себя в каждой точке); Симметрическое, так как из того, что «прямая x пересекает прямую y» следует, что «прямая y пересекает прямую x» для любых прямых x,y; Также можно заметить, что это отношение не является тождественным, транзитивным и полным.
2. xRy=«число x больше числа y на 2» (на множестве натуральных чисел). Это отношение: Антирефлексивное, так как ни для одного элемента из множества натуральных чисел не выполняется «число x больше числа x на 2»; Антисимметрическое, так как для любых элементов x,y из множества натуральных чисел из того, что «число x больше числа y на 2» следует невыполнение того, что «число y больше числа x на 2»; Также можно заметить, что это отношение не является тождественным, транзитивным и полным.
3. xRy=«число x делится на число y без остатка» (на множестве натуральных чисел). Это отношение: Рефлексивно, так как для любого элемента x из множества натуральных чисел выполняется «число x делится на число x без остатка»; Тождественно, так как для любых элементов x,y из множества натуральных чисел из того, что «число x делится на число y без остатка» и «число y делится на число x без остатка», следует, что x=y; Транзитивное, так как для любых элементов x,y,z из множества натуральных чисел из того, что «число x делится на число y без остатка» и «число y делится на число z без остатка», следует, что «число x делится на число z без остатка»; Также можно заметить, что это отношение не является симметрическим, антисимметрическим и полным. Это отношение является отношением порядка.
4. xRy=«x – сестра y» (на множестве людей) Это отношение: Антирефлексивно, так как для любого человека x неверно, что «x – сестра x»; Транзитивно, так как для любых людей x, y, z таких что «x – сестра y» и «y – сестра z» следует, что «x – сестра z» . Также можно заметить, что это отношение не является симметрическим, антисимметрическим, тождественным и полным.

Задания к выполнению:

1. По примеру 1 каждый студент самостоятельно задаёт отношения между двумя множествами X,Y в виде произвольного неравенства. Построить новое множество из упорядоченных пар с бинарным отношением между элементами так, чтобы при подстановке в заданное неравенство оно выполнялось. Записать два неравенства.
2. По примеру 2 каждый студент самостоятельно записывает множество X и декартово произведение на одном множестве X × X.
3. По примеру 3 каждый студент самостоятельно записывает два множества: X и Y. Следует найти декартово произведение двух множеств X × Y.

Список источников и литературы:

- *литература (основная, дополнительная)*

Основная литература:
1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с

Дополнительная литература:

5. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

1. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

1. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.

2. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия.

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 11. Числовые последовательности (1ч.)

Цель: Формирование знаний о способах задания числовых последовательностей и закрепить умения вычислять пределы числовой последовательности.

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Числовые последовательности и операции над ними.
2. Понятие сходящейся последовательности.
3. Основные свойства сходящихся последовательностей.

Контрольные вопросы:

1. Какое множество называется универсальным?
2. Что такое дополнение множества до универсального?
3. Приведите пример любого множества и найдите его дополнение до универсального.

Примеры выполнения задания:

Пример 1. Вычислите пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{n^2+1}$

Решение: При $n\to\infty$ числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают, следовательно, нельзя применить теорему о пределе частного двух последовательностей.

Разделив числитель и знаменатель и знаменатель на старшую степень n, т.е. на $n^2\neq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

при $n\to\infty$ получим:

Учтитывая, что последовательности $\frac{3}{n}$ и $\frac{1}{n^2}$ являются бесконечно малыми, и используя свойства бесконечно малых последовательностей, окончательно будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{0}{1}=0$$

. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{n^2+1}=0$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-1}{n^2+1}$

Решение: Разделив числитель и знаменатель и знаменатель на старшую степень n, т.е. на $n^2\neq 0$ при $n\to\infty$ получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}$$

При $n\to\infty$ последовательность $\left(1-\frac{1}{n^3}\right)$ является сходящейся и имеет предел, равный 1, а последовательность $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)$ является бесконечно малой и имеет предел, равный 0,

следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}=+\infty$ Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-1}{n^2+1}=+\infty$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Здесь первоначально числитель и знаменатель дроби умножили на ненулевое сопряженное выражение $\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)$.

Задания к выполнению:

1. Найти предел последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n-1}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+1}{3n+1}$ в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+10n-5}{3n^3+3n}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-3}{n^3-n^2}$

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n+1}{2n^2-3n}$ е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2+2}{3n^3+4n}$ ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$ к) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}}$

Список источников и литературы:

- *литература (основная, дополнительная)*

Основная литература:

1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с

Дополнительная литература:

1. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

1. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

1. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.
2. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия.

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 12. Понятие и предел функции и свойства пределов функций, замечательные пределы (1ч.)

Цель: Формирование знаний о способах задания функций и закрепить умения вычислять пределы функции.

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Понятие функции и способы задания функции.
2. Область определения функции.
3. Предел функции. Теоремы о пределах функции.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определения предела функции в точке, предела функции в бесконечности.

2. Какая функция называется бесконечно малой и каковы ее основные свойства?
3. Сформулируйте первый замечательный предел и его следствия.

Примеры выполнения задания:

Пример 1. Вычислите пределы следующих функций.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9-x^2}{x-1}$

Решение. Пользуясь непрерывностью функции *f(x)*, пробуем подставить значение *x = 2* в функцию *f(x)*: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9-x^2}{x-1}=\dfrac{9-4}{2-1}=5$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{4x^4-x^2+3x-7}$

Решение. Если вычисляется предел при x→∞ и имеется неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то пробуем в числителе и знаменателе вынести за скобки переменную в наивысшей степени (или числитель и знаменатель делим на переменную в наивысшей степени):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{4x^4-x^2+3x-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(4-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}-\frac{7}{x^4}\right)}=\frac{0-0+0}{4-0+0-0}=0$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^{1+2x}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cdot\sin 3x}{3x}=3$ и $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)=1$,

следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^{1+2x}=3^1=3$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{3x^2+1}\right)^{x^2}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x^2}}{3+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{3}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$

Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{3x^2+1}\right)^{x^2}=\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{+\infty}\right]=0$.

Задания к выполнению:

1. **Найдите предел следующих функций**:

а)

1.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$	9.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x-x^3}{3x-2x^2+x^4}$
2.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$	10.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$

3.	$\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$	11.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$
4.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$	12.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$
5.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$	13.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$
6.	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-x}{x^4+2x^2-3}$	14.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+x^6}{x^3+x^4+x^5}$
7.	$\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$	15.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^3+3}{3x^3-5}$
8.	$\lim\limits_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$	16.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+1}{2x^3+3x^2}$

Список источников и литературы:

- *литература (основная, дополнительная)*

Основная литература:

1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с

Дополнительная литература:

1. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

1. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

1. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.

www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия.

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 13. Производная функции и производная сложной функции(1ч.)

Цель: Научить вычислять производные сложных функций, пользуясь правилами дифференцирования и таблицей производных.

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Определение производной.
2. Дифференциал функции.
3. Производная сложных функций.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение производной.
2. Каков ее геометрический смысл?
3. Сформулируйте основные правила дифференцирования функций.

Примеры выполнения задания:

Пример 1. Найти производную от функции $y = \ln^3 x$.

Решение. Полагаем $z = \ln x$, тогда $y = z^3$. Отсюда $y'_z = 3z^2 = 3 \cdot \ln^2 x$, $z'_x = \frac{1}{x}$. Следовательно, $y'_x = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$.

При достаточном навыке промежуточную переменную z не пишут, вводя ее лишь мысленно.

Пример 2. Найти производную от функции $y = \sin(x^3 - 3x^2 + 5)$.

Решение.

$$y' = \cos(x^3 - 3x^2 + 5) \cdot (x^3 - 3x^2 + 5)' = (3x^2 - 6x)\cos(x^3 - 3x^2 + 5) =$$
$$= 3x(x-2)\cos(x^3 - 3x^2 + 5).$$

Пример 3. Найти производную от функции $y = e^{\sqrt{x^2+x-1}}$.

Решение.

$$y' = e^{\sqrt{x^2+x-1}} \cdot \left(\sqrt{x^2 + x - 1}\right)' = \frac{e^{\sqrt{x^2+x-1}}}{2\sqrt{x^2+x-1}} \cdot (x^2 + x - 1)' = \frac{(2x+1) \cdot e^{\sqrt{x^2+x-1}}}{2\sqrt{x^2+x-1}}.$$

Задания к выполнению:

1. Найти производные следующих функций:

1.	$y = x + \ln\frac{x-1}{x+1}$	9.	$y = \frac{\sqrt{x^2-3}(2x^2+3)}{x^3}$
2.	$y = x^3 \ln x - x^2$	10.	$y = \ln\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$
3.	$y = x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}$	11.	$y = \frac{\sqrt{x^3+3x}}{x+1}$
4.	$y = \ln\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$	12.	$y = 5^{x^3} \cdot \ln^2 x$
5.	$y = \frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$	13.	$y = \frac{x\ln x + 1}{x \ln x - 1}$
6.	$y = \frac{4x - x^4}{1-3x^2}$	14.	$y = 5^{x^3} \cdot \ln^2 x$
7.	$y = \mathrm{arctg}(x-1) + \frac{x-1}{x^2-2x+2}$	15.	$y = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$
8.	$y = \sqrt[3]{\frac{1-e^{4x}}{e^{4x}}}$	16.	$y = \left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^2$

Список источников и литературы:

- литература (основная, дополнительная)

Основная литература:

1. Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 10-е издание – Москва., Айрис пресс, 2011 г.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика. / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 447 с

Дополнительная литература:

1. Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с.

- *справочные и информационные издания.*

6. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

1. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач.
2. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.

Материально-техническое обеспечение занятия.

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 18. Элементы комбинаторики (1ч.)

Цель: ознакомиться с понятиями и научиться решать задачи на вычисление числа перестановок, размещений с и сочетаний

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Объекты комбинаторики.
2. Задачи комбинаторики.
3. сочетания, перестановки, размещение.

Контрольные вопросы:

1. Что называется размещением? Как вычисляются размещения??
2. Что называется перестановками? Как вычисляются перестановки?
3. Что называется сочетанием? Как вычисляются сочетания?

Примеры выполнения задания:

Пример1. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти цветов?

Решение. Искомое число трехполосных флагов:

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Пример2. Сколькими способами можно расставить 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

*Решение***.** Искомое число расстановки 8 ладей

$$P_8 = 8! = 40320.$$

Пример3. Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

*Решение***.** Матчей состоится столько, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, состоящего из 16 элементов, т.е. их число равно

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{14!*15*16}{2!*14!} = \frac{15*16}{2} = 120$$

.

Задания к выполнению:

1. Номера машин состоят из 3 букв русского алфавита (33 буквы) и 4 цифр. Сколько существует различных номеров автомашин?
2. На рояле 88 клавиш. Сколькими способами можно извлечь последовательно звуков?
3. Сколько есть шестизначных чисел, делящихся на 5?
4. Сколькими способами можно разложить 7 разных монет в три кармана?
5. Сколько можно составить пятизначных чисел, в десятичной записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5?
6. Сколькими способами можно усадить 20 человек за круглым столом, считая способы одинаковыми, если их можно получить один из другого движением по кругу?
7. Сколько есть пятизначных чисел, делящихся на 5, в записи которых нет одинаковых цифр?

8. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см нарисована окружность радиуса 100 см, не проходящая через вершины клеток и не касающаяся сторон клеток. Сколько клеток может пересекать эта окружность?
9. Сколькими способами можно расставить в ряд числа так, чтобы числа стояли рядом и притом шли в порядке возрастания?
10. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 7, 8, если каждую цифру можно использовать только один раз?
11. Из слова РОТ перестановкой букв можно получить еще такие слова: ТОР, ОРТ, ОТР, ТРО, РТО. Их называют анаграммами. Сколько анаграмм можно составить из слова ЛОГАРИФМ?

Список источников и литературы:

- *литература (основная, дополнительная)*

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - М. : Юрайт, 2013
2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт : ИД Юрайт, 2011.

- *справочные и информационные издания.*

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

1. https://studfiles.net
2. http://docplayer.ru

Материально-техническое обеспечение занятия.

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 19. Основные понятия теории вероятностей, определение и свойства вероятностей (1ч.)

Цель: Добиться усвоения понятия случайного события, суммы, разности и произведения событий, умения вычислять вероятность события непосредственно, используя классическую формулу и элементы комбинаторики.

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Основные понятия теории вероятностей.
2. Классическое и статистическое определение вероятностей.
3. Свойства вероятностей.

Контрольные вопросы:

1. Дать определение пространства элементарных событий. Привести примеры.
2. Сформулировать понятие полной группы событий. Привести примеры.
3. Сформулировать классическое определение вероятности случайного события.

Примеры выполнения задания:

Пример 1. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры. Какова вероятность того, что он с первого раза наберёт эти цифры правильно, если он помнит, что они различны?

*Решение***.** Обозначим А – событие, состоящее в том, что абонент, набрав произвольно две цифры, угадал их правильно. М – число правильных вариантов, очевидно, что М=1; N– число различных цифр, $N = A_{10}^{2} = \frac{10!}{8!} = \frac{8!*9*10}{8!} = 9*10 = 90$. Таким образом, Р(А)=M/N=1/90.

Пример 2. Шесть шариков случайным образом располагаются в шести ящиках так, что для каждого шарика равновероятно попадание в любой ящик и в одном ящике может находиться несколько шариков. Какова вероятность того, что в каждом ящике окажется по одному шарику?

Решение. Событие А – в каждом ящике по одному шарику. М – число вариантов распределения шариков, при которых в каждый ящик попадает по одному шарику, М=6! (число способов переставить между собой 6 элементов).N– общее число вариантов N=6^6 (так как каждый шарик может попасть в каждый из ящиков). В результате получаем $P(A)=\frac{6!}{6^6}=\frac{5!*6}{6^6}=\frac{5!}{6^5}$.

Пример 3. В урне 3 белых и 4 чёрных шара. Из урны вынимаются два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение. Обозначим: А – событие, состоящее в появлении белых шаров; N– число способов вытащить 2 шара из 7; $N=C_7^2$; М– число способов вытащить 2 белых шара из имеющихся 3 белых шаров; $M=C_3^2$.

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{2!*5!*3!}{7!*2!*1!}=\frac{3!}{7*6}=\frac{1}{7}$$

Пример 4. В ящике 16 стандартных и 7 бракованных деталей. Наудачу извлечены 6 деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных ровно 4 стандартных детали.

Решение: Подставляем в формулу вероятности значения: K=16 стандартных деталей, N−K=7 бракованных деталей, итого N=16+7=23 всего деталей в ящике. Из ящика извлекают n=6 деталей, из них должно быть k=4 стандартных и соответственно, n−k=6−4=2 бракованные. Получаем нужную вероятность:

$$P=\frac{C_{16}^4\cdot C_7^2}{C_{23}^6}=\frac{1820\cdot 21}{100947}=0.379.$$

Пример 5. В партии из 12 изделий 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди 3 наугад взятых есть хотя бы одно нестандартное.

Решение: Эта задача самую малость сложнее предыдущих. В ней помимо исходного события A= (Среди 3 наугад взятых изделий есть хотя бы одно нестандартное), введем еще противоположное ему событие, которое можно записать как $\overline{A}$= (Все три выбранные изделия стандартные).

Будем искать вероятность события $\overline{A}$. Выпишем значения параметров: K=8 стандартных изделия, N−K=12−8=4 нестандартных изделия, всего N=12 изделий в партии. Из партии извлекают n=3 изделия, и все они должны оказаться стандартными, то есть k=3 и n−k=0.

$$P(\overline{A})=\frac{C_8^3\cdot C_4^0}{C_{12}^3}=\frac{56\cdot 1}{220}=\frac{14}{55}=0.255.$$

Тогда вероятность искомого события (что будет хотя бы одно нестандартное изделие из 3), равна:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.255=0.745.$$

Пример 6. Мастер для замены получил 8 однотипных деталей, из которых 3 бракованные. Он заменил 2 детали. Найти вероятность того, что замененными оказались годные детали.

Решение: Подставляем в формулу вероятности значения: K=8−3=5 годных деталей, N−K=3 бракованных, N=8 всего деталей у мастера. Выбираем для замены n=2 детали, и обе они должны оказаться годными, то есть: k=2, n−k=0. Приходим к ответу:

$$P=\frac{C_5^2\cdot C_3^0}{C_8^2}=\frac{10\cdot 1}{28}=\frac{5}{14}=0.357.$$

Задания к выполнению:

1. Один раз подбрасывается игральная кость. Построить пространство элементарных исходов. Описать события:

A_1 - появление не более 2-х очков; A_2 - появление 3-х или 4-х очков;

A_3 - появление не менее 5 очков; A_4 -появление четного количества очков.

Есть ли среди этих событий равновозможные? Указать, какие из этих событий несовместны, какие совместны, какие образуют полную группу?

2. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Какова вероятность правильно набрать номер?

3. Из трех бухгалтеров, восьми менеджеров шести научных сотрудников необходимо случайным отбором сформировать комитет из десяти человек. Какова вероятность того, что в комитете окажутся: один бухгалтер, пять менеджеров и четверо научных сотрудников?

Список источников и литературы:

- *литература (основная, дополнительная);*

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - М. : Юрайт, 2013

2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт : ИД Юрайт, 2011.

- *справочные и информационные издания.*

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

3. https://studfiles.net
4. http://docplayer.ru

Материально-техническое обеспечение занятия.

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 20. Действия над вероятностями (2ч.)

Цель: Научить вычислять вероятность событий с помощью теорем сложения и умножения вероятностей. Дать навыки применения теорем сложения и умножения к решению профильных задач.

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Сложение вероятностей несовместных событий.
2. Сложение вероятностей взаимно совместных событий.
3. Умножение вероятностей.

Контрольные вопросы:

1. Теорема сложения вероятностей для совместных и для несовместных событий\ъ
2. Теорема умножения вероятностей для зависимых и для независимых событий.
3. Вероятность появления хотя бы одного события.

Примеры выполнения задания:

Пример 1: Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Решение: Введем независимые события: A1 = (при аварии сработает первый сигнализатор); A2 = (при аварии сработает второй сигнализатор); по условию задачи P(A1)=0,95, P(A2)=0,9.

Введем событие X = (при аварии сработает только один сигнализатор). Это событие произойдет, если при аварии сработает первый сигнализатор и не сработает второй, или если при аварии сработает второй сигнализатор и не сработает первый, то есть

$$X = A1 \cdot \overline{A2} + \overline{A1} \cdot A2.$$

Тогда вероятность события X по теоремам сложения и умножения вероятностей равна

$$P(X) = P(A1) \cdot P(\overline{A2}) + P(\overline{A1}) \cdot P(A2) = 0,95 \cdot 0,1 + 0,05 \cdot 0,9 = 0,14.$$

Ответ: 0,14.

Пример 2: Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Решение: Пусть p - вероятность попадания в цель при одном выстреле. Введем событие X = {при четырех выстрелах есть хотя бы одно попадание} и противоположное ему событие $\overline{X}$ = {при четырех выстрелах нет ни одного попадания}.

Вероятность события $\overline{X}$ равна $P(\overline{X}) = (1-p)^4$, тогда вероятность события X равна

$$P(X) = 1 - P(\overline{X}) = 1 - (1-p)^4.$$

По условию эта вероятность равна 0,9984, откуда получаем уравнение относительно p:

$$1 - (1-p)^4 = 0,9984, \;\; (1-p)^4 = 0,0016, \;\; (1-p) = 0,2, \;\; p = 0,8.$$

Таким образом, вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8.

Ответ: 0,8.

Пример 3. В первой урне находятся 10 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Решение. Введем событие X = (Оба извлеченных шара черного цвета). Введем вспомогательные независимые события: H1 = (Из первой урны извлечен черный шар), H2 = (Из второй урны извлечен черный шар). Найдем вероятности этих событий по классическому определению вероятности:

$$P(H_{1ч}) = \frac{4}{10+4} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}, \; P(H_{2ч}) = \frac{9}{5+9} = \frac{9}{14}.$$

Тогда

$$P(X) = P(H_{1ч} \cdot H_{2ч}) = P(H_{1ч}) \cdot P(H_{2ч}) = \frac{2}{7} \cdot \frac{9}{14} = \frac{9}{49} \approx 0,184.$$

Ответ: 0,184

Пример 4. Трое учащихся на экзамене независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Вероятности ее решения этими учащимися равны 0,8, 0,7 и 0,6 соответственно. Найдите вероятность того, что хотя бы один учащийся решит задачу.

Решение. Введем событие X = (Хотя бы один учащийся решит задачу) и противоположное ему $\overline{X}$ = (Ни один учащийся не решит задачу). Введем вспомогательные события: A1 = (Первый учащийся решил задачу), A2 = (Второй учащийся решил задачу), A3 = (Третий учащийся решил задачу), вероятности

$$P(A_1) = 0,8, \; P(A_2) = 0,7, \; P(A_2) = 0,6.$$

Выразим событие $\overline{X} = \overline{A1} * \overline{A2} * \overline{A3}$. Считаем вероятность как вероятность произведения независимых событий:

$$P(\overline{X}) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = (1-0,8)(1-0,7)(1-0,6) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4 = 0,024.$$

Задания к выполнению:

1. При проверке документа можно обнаружить четыре нарушения в его оформлении. Рассматриваются события: *A* - обнаружено ровно одно нарушение; *B* - обнаружено хотя бы одно нарушение; *C* - обнаружено не менее 2-х нарушений; *D* - обнаружено ровно два нарушения; *E* - обнаружено ровно 3 нарушения; *F* - обнаружены все нарушения. Указать в чем состоят события:

2. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлены 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 2 учебника. Найти вероятность того, что: а) первый учебник будет в переплете (событие *A*); б) второй учебник будет в переплете (событие *B*); в)

два учебника будут в переплете (событие *C*); г) хотя бы один учебник будет в переплете (событие *D*).
3. В ящике имеется 10 одинаковых деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает деталь, записывает цвет и возвращает деталь в ящик. Найти вероятность того, что три извлеченные детали окажутся окрашенными.
4. Из колоды в 52 карты наудачу извлекается 3 карты. Какова вероятность, что три карты красной масти, если среди них два туза.
5. Студент, разыскивая нужную ему книгу, решил обойти три библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно, есть в ее фондах книга или нет. Если книга есть, то одинаково вероятно выдана она читателю или свободна. Найти вероятность того, что студент получит книгу.

Список источников и литературы:

- *источники (основные, дополнительные);*
- *литература (основная, дополнительная);*

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - М. : Юрайт, 2013
2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт : ИД Юрайт, 2011.

- *справочные и информационные издания.*

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

1. https://studfiles.net
2. http://docplayer.ru

Материально-техническое обеспечение занятия.

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 21. Условная вероятность. Формула полной вероятности (1ч.)

Цель: вычисление вероятностей сложных событий с использованием формулы полной вероятности.

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Формула полной вероятности..
2. Условные вероятности событий.
3. Примеры решения задач.

Контрольные вопросы:

1. Постановка задачи, в которой вероятность события вычисляется по формуле полной вероятности
2. Записать формулу полной вероятности и дать интерпретацию входящих в нее слагаемых

Примеры выполнения задания:

Пример 1. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие A).

Решение. После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая условная вероятность $P(B|A)=\frac{3}{5}$. Этот же результат можно получить по формуле $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$. Действительно, вероятность появления белого шара при первом испытании $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Найдем вероятность $P(AB)$ того, что в первом испытании появится черный шар, а во втором — белый. Общее число исходов — совместного появления двух шаров, безразлично какого цвета, равно числу размещений $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$. Из этого числа исходов событию AB благоприятствуют $3 \cdot 3 = 9$ исходов. Следовательно, $P(AB) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$.

Искомая условная вероятность $P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3/10}{1/2} = \frac{3}{5}$

*Пример 2***.** В трамвайном парке имеются 15 трамваев маршрута №1 и 10 трамваев маршрута №2. Какова вероятность того, что вторым по счету на линию выйдет трамвай маршрута №1?

Решение. Пусть *А* - событие, состоящее в том, что на линию вышел трамвай маршрута №1, *В*- маршрута №2.

Рассмотрим все события, которые могут при этом быть (в условиях нашей задачи): $AA,\ AB,\ BA,\ BB$. Из них нас будут интересовать только первое и третье, когда вторым выйдет трамвай маршрута №1.

Так как все эти события совместны, то:

$P(AA) = P(A) \cdot P(A \mid A) = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24}$; $P(BA) = P(B) P(A \mid B) = \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24}$;

отсюда искомая вероятность $P = P(AA) + P(BA) = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} + \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} = 0,6$

Пример 3. Каждый из двух стрелков независимо друг от друга произвел выстрел по некоторому объекту. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7; вторым – 0,6. Объект поражен одним попаданием. Определить вероятность того, что объект поражен первым стрелком.

Решение: Событие А – поражение объекта одним попаданием.

До опыта возможны следующие гипотезы:

H_1 – ни один стрелок не попадет, H_2 – первый стрелок попадет, второй – нет; H_3 – второй стрелок попадет, первый – нет. H_4 – оба стрелка попадут;

Вероятности этих гипотез равны:

$P(H_1)$ = 0,3· 0,4 = 0,12, $P(H_2)$ = 0,7 · 0,4 = 0,28, $P(H_3)$ = 0,3 · 0,6 = 0,18, $P(H_4)$ = 0,7 · 0,6 = 0,42

Условные вероятности события А при этих гипотезах равны:

$P\left(A/H_1\right) = 0$; $P\left(A/H_2\right) = 1$; $P\left(A/H_3\right) = 1$; $P\left(A/H_4\right) = 0$.

После опыта гипотезы H_1 и H_4 становятся невозможными, а вероятность гипотезы H_2 будет равна

$$P\left(H_2/A\right) = \frac{P(H_2) \cdot P\left(A/H_2\right)}{P(H_3) \cdot P\left(A/H_2\right) + P(H_4) \cdot P\left(A/H_3\right)} = \frac{0,28 \cdot 1}{0,28 + 0,18} \approx 0,61$$

.

Задания к выполнению:

1. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе No1, 20 деталей - на заводе No 2 и 18 деталей - на заводе No 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе No 1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах No 2 и No 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется отличного качества.

2. Монету подбрасывают 6 раз. Какова вероятность того, что она упадет «гербом» вверх не больше 3 раз.

3. В магазин поступили электрические лампочки одного типа, изготовленные на четырех заводах: с первого завода - 250 шт.; со второго - 525 шт.; с третьего - 275 шт. и с четвертого - 950 шт. Вероятность того, что лампочка прогорит более 1 500 часов, для первого завода равна 0,15, для второго - 0,30; для третьего - 0,20 и четвертого - 0,10. При раскладке по полкам магазина лампочки были перемешаны. Какова вероятность того, что купленная лампочка прогорит более 1 500 часов?

4. Некоторое изделие выпускают тремя заводами. Объем продукции, поставляемый вторым предприятием, в 2 раза превышает соответствующие объемы продукций первого и третьего предприятий. Доля брака в среднем составляет на первом предприятии 5%, на втором - 20%, а на третьем - 10%. В продажу поступила партия данного изделия. Купленное изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что оно было выпущено третьим предприятием?
5. На склад поступает продукция 3-х фабрик. Причем продукция первой фабрики составляет 20%, второй – 46% и третьей – 34%. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%, для второй – 2%, для третьей – 1%. Найти вероятность того, что наудачу взятые изделия произведены на первой фабрике, если они оказались нестандартными

Список источников и литературы:

- *источники (основные, дополнительные);*
- *литература (основная, дополнительная);*

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - М. : Юрайт, 2013
2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт : ИД Юрайт, 2011.

- *справочные и информационные издания.*

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

3. https://studfiles.net
4. http://docplayer.ru

Материально-техническое обеспечение занятия.

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 22. Формула Байеса. Повторные испытания. Формула Бернулли (2ч.)

Цель: Научить проводить предварительный анализ задачи и выбирать соответствующие теоремы для нахождения вероятностей событий. Научить вычислять вероятность событий с помощью теорем Байеса, Бернулли.

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:

1. Формула Байеса.
2. Формула Бернулли.
3. Примеры независимых повторных испытаний.

Контрольные вопросы:

3. Вероятности каких событий можно вычислять по формуле Бернулли?
4. Как записывается формула Бернулли?
5. Приведите пример любого множества и найдите его дополнение до универсального.

Примеры выполнения задания:

Пример 1. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь 1-го набора стандартная, равна 0,8, а второго – 0,9. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной, найти вероятность того, что деталь извлечена из второго набора.

Решение: Пусть H_1, H_2 – гипотезы, заключающиеся в том, что деталь принадлежит первому или второму набору и вероятность каждой гипотезы равна ½. По условию, событие А (извлечение стандартной детали) произошло. Причём условные вероятности этого события по условию равны . Апостериорную вероятность $P_A(H_2)$ вычисляем по формуле Байеса:

*Пример 2***.** 30% пациентов, поступивших в больницу, принадлежат первой социальной группе, 20% - второй и 50% - третьей. Вероятность заболевания туберкулёзом для представителя каждой социальной группы соответственно равна 0,02, 0,03 и

0,01. Проведённые анализы для случайно выбранного пациента показали наличие туберкулёза. Найти вероятность того, что это представитель третьей группы.

Решение. Пусть H_1, H_2, H_3 – гипотезы, заключающиеся в том, что пациент принадлежит соответственно первой, второй и третьей группам. Очевидно, что они образуют полную группу событий, причём $p(H_1)=0,3; p(H_2)=0,2; p(H_3)=0,5$. По условию событие А, обнаружение туберкулёза у больного, произошло, причём условные вероятности по данным условия равны $p(A/H_1)=0,02; p(A/H_2)=0,03;$ и $p(A/H_3)=0,01$. Апостериорную вероятность $p(H_3/A)$ вычисляем по формуле Байеса:

Пример 3. Часы одной марки изготавливаются на трех заводах и поступают в магазин. Первый завод производит 20% всей продукции, второй - 30%, третий - 50%. В продукции первого завода спешат 5% всех часов, второго - 3%, третьего - 2%. Купленные часы спешат. Какова вероятность того, что они изготовлены на первом заводе?

Решение. Пусть событие А — купленные часы спешат.

Р(А)=0,2*0,05+0,3*0,03+0,5*0,02=0,021

Пример 4. К больному с приступом аппендицита приехала скорая помощь. В городе четыре больницы (№ 1, № 2, № 3, № 4). Вероятность попасть в первую больницу составляет 10%; во вторую — 20%; в третью — 30%; в четвертую — 40%. В первой больнице вероятность послеоперационного осложнения — 50%; во второй — 30%; в третьей — 20%; в четвертой — 5%. Известно, что некоторый человек был отвезен «скорой» в некоторую клинику и прооперирован удачно. Какова вероятность того, что операция производилась в 1-й, 2-й, 3-й и 4-й клиниках?

Решение: $P(A)=0,81$

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,1\cdot 0,5}{0,81} \approx 0,062, \quad P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{0,2\cdot 0,7}{0,81} \approx 0,173$$

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3)P_{B_3}(A)}{P(A)} = \frac{0,3\cdot 0,8}{0,81} \approx 0,296, \quad P_A(B_4) = \frac{P(B_4)P_{B_4}(A)}{P(A)} = \frac{0,4\cdot 0,95}{0,81} \approx 0,469$$

Пример 4. Для нормальной работы линии должно быть не менее 8 автобусов, а их имеется 10. Вероятность невыхода каждого автобуса на линию равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы в ближайший день.

Решение: Т.к. для нормальной работы надо 8 автобусов из 10, или 9 из 10, или 10, а вероятность выхода каждого автобуса р= 1 – q = 1 – 0,1 = 0,9. Вероятность нормальной работы – этосумма вероятностей:

$$P(A) = C_{10}^8 p^8 q^{10-8} + C_{10}^9 p^9 q^{10-9} + C_{10}^{10} p^8 q^{10-8} = \frac{10!}{8!\cdot 2!}(0,9)^8(0,1)^2 + \frac{10!}{9!\cdot 1!}(0,9)^9(0,1) +$$

$$+\frac{10!}{10!\cdot 0!}(0,9)^{10}(0,1)^0 \approx \frac{9\cdot 10}{2}0,43\cdot 0,01 + 10\cdot 0,39\cdot 0,9 + 0,35 \approx 0,19+0,39+0,35=0,93$$

Задания к выполнению:

1. Из 50 деталей 18 изготовлены в первом цехе, 20 – во втором, остальные – в третьем. Первый и третий цеха дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,9, второй – с вероятностью 0,6. Взятая деталь оказалась отличного качества. Какова вероятность того, что деталь изготовлена во втором цехе?
2. В специализированную больницу поступают в среднем 50 % больных с заболеванием К, 30 % - с заболеванием Н, 20% - с заболеванием М. вероятность полного излечения от болезни К равна 0,7, для болезней Н и М эта вероятность соответственно равна 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием К.
3. У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку в первом месте, рыба клюет с вероятностью 0,6; во втором месте – с вероятностью 0,9; в третьем – с вероятностью 0,7. Рыбак, выйдя на ловлю рыбы, закинул удочку, и рыба клюнула. Найти вероятность того, что он удил рыбу в первом месте.

4. Пассажир может обратиться за билетом в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их места расположения и равны соответственно 0,3, 0,6 и 0,1. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равна для первой кассы 0,4, для второй 0,6, для третьей 0,2. Пассажир направился за билетом в одну из касс и приобрел билет. Найти вероятность того, что это была третья касса.
5. Три организации поставили в контрольное управление счета для выборочной проверки: первая 15 счетов, вторая – 10, третья – 25. Вероятности правильного оформления счетов у этих организаций соответственно таковы: 0,9; 0,8; 0,85. Был выбран один счет, и он оказался правильным. Определить вероятность того, что этот счет принадлежит второй организации.

Список источников и литературы:
- *источники (основные, дополнительные);*
- *литература (основная, дополнительная);*

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - М. : Юрайт, 2013
2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт : ИД Юрайт, 2011.

- *справочные и информационные издания.*

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».
5. https://studfiles.net
6. http://docplayer.ru

Материально-техническое обеспечение занятия.

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

Тема 23. Дискретная случайная величина и функция её распределения. (2ч.)

Цель: Решение задач на запись распределения и вычисление характеристик дискретной случайной величины.

Форма проведения – коллективное решение задач.

Теоретические вопросы:
1. Определение дискретной случайной величины и ряд её распределения.
2. Функция распределения дискретной случайной величины: построение, вычисление.

Контрольные вопросы:
1. Дайте определение дискретной случайной величины
2. Дайте определение математического ожидания случайной величины.
3. Что называется дисперсией случайной величины

Примеры выполнения задания:

Пример 1. Закон распределения случайной величины задан таблично. Найти $p(x<2)$, $p(x>4)$, $p(2\le x\le 4)$, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Решение**.** $p(x<2)=0{,}1$;
$p(x>4)=0{,}1$;
$p(2\le x\le 4)=0{,}2+0{,}4+0{,}2=0{,}8$;
$M(x)=1*0{,}1+2*0{,}2+3*0{,}4+4*0{,}2+5*0{,}1=3$;
$D(x)=1^2*0{,}1+2^2*0{,}2+3^2*0{,}4+4^2*0{,}2+5^2*0{,}1-3^2=1{,}2$
$\sigma(x)=\sqrt{1{,}2}=1{,}095$

Пример 2. Фермер считает, что, принимая во внимание различные потери и колебания цен, он сможет выручить не более 60 центов за десяток яиц и потерять не более 20-ти центов за десяток и что вероятности возможных выигрышей и потерь таковы:

цена за 10 яиц	0,6	0,4	0,2	0	-0,2
P	0,2	0,5	0,2	0,06	0,04

Как оценить ожидаемую прибыль от продажи десятка яиц; от ожидаемых им в этом году 100000 яиц?

Решение. x – случайная, прибыль от продажи 10 яиц.

M(x)=0,6*0,2+0,4*0,5+0,2*0,2+0*0,06-0,2*0,04=0,352

M(10000x)=10000*0,352=3520 $

$D(x)=0.6^2*0.2+0.4^2*0.5+0.2^2*0.2+0^2*0.06+(-0.2)^2*0.04-0.352^2=0.037696$

$\sigma(x)=\sqrt{0,037696}=0.194154578$

$D(10000x)=10000^2*D(x)=19415457.76$

$\sigma(x)=\sqrt{0,194154578}=0.441$

Задания к выполнению:

1. **Задайте множество другим способом** (если это возможно):

а) $A = \{x|\ x \in N,\ x \leq 9\}$; б) $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; в) $A = \{x|\ x \in R,\ x^2 - 3 = 0\}$.

Ответы: а) Элементами множества А являются натуральные числа,
которые меньше 9 и само число 9, значит, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

Список источников и литературы:

- *источники (основные, дополнительные);*
- *литература (основная, дополнительная);*

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - М. : Юрайт, 2013

2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт : ИД Юрайт, 2011.

- *справочные и информационные издания.*

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

7. https://studfiles.net
8. http://docplayer.ru

Материально-техническое обеспечение занятия.

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет

8.2.Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модулей)

Вид работы	*Содержание (перечень вопросов)*	*Трудоемкость самостоятельной работы (в часах)*	*Рекомендации*
Раздел № 1. Линейная алгебра и геометрия			
Подготовка к лекции №1-8	Определение и виды матриц. Основные действия над матрицами. Определитель n-го порядка. Вычисление определителя второго и	*N=6ч*	Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 4-е издание – Москва., Айрис пресс, 2006 г. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.-М.: Наука,1997 Максименко В. Н., Меграбов А.

	третьего порядка. Обратная матрица и способы ее нахождения. Система m линейных уравнений с n неизвестными. Матричный метод решения системы уравнений. Решение системы линейных уравнений методом Крамера. Алгоритм решения системы линейных уравнений методом Гаусса. Уравнение прямой на плоскости. Кривые второго порядка.		Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.
Написание реферата	Матрицы и их виды Элементарные матрицы Ранг матрицы Определители n-го порядка Свойства определителей Системы линейных уравнений Теорема Кронекера-Капелли. Методы решения систем линейных уравнений. Уравнение прямой на плоскости. Кривые второго порядка.	N=7ч	Реферат выполняется и оформляется по структуре реферата заданное преподавателем.
Итого		N=13ч	
Раздел № 2. Математический анализ			
Подготовка к лекции №9-17	Множество. Основные действия над множествами. Бинарное отношение на множествах. Числовые последовательности и операции над ними. Понятие функции и способы задания функции. Предел функции.	N=6ч	Письменный Конспект лекций по высшей математике (Полный курс), 4-е издание – Москва., Айрис пресс, 2006 г. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.-М.: Наука,1997 Максименко В. Н., Меграбов А. Г., Павшок Л. В. Курс математического анализа: учебное пособие, Ч.1, НГТУ 2009 г. 345 с. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я.

	Определение производной. Дифференциал функции.		Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с. www.math.by - образовательный сайт по математике представляет собой сборник часто встречаемых задач по математике (алгебре, геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и т.д.) и решений этих задач. www.webmath.ru - сайт решения практических задач по математике.
Написание реферата	Теория множеств. Последовательности. Функции. Пределы функций. Производная функции. Дифференциал функции	*N=7ч*	Реферат выполняется и оформляется по структуре реферата заданное преподавателем.
Итого		*N=13ч*	
Раздел № 3. Теория вероятностей и математическая статистика			
Подготовка к лекции №18-34	Объекты и задачи комбинаторики; Основные понятия теории вероятностей. Свойства вероятностей . Сложение и умножение вероятностей. Формула Байеса. Формула Бернулли. Определение дискретной случайной величины и ряд её распределения. Определение непрерывной случайной величины и её связь с вероятностью.	*N=13ч*	Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003, 480 с. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М: «Высшая школа», 2004, 404 с. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука. 1969, 576 с. https://studfiles.net http://docplayer.ru
Написание реферата	Алгебра событий. Понятие теории вероятностей. Сложение и умножение вероятностей. Статистическая гипотеза. Виды выборок.	*N=13ч*	Реферат выполняется и оформляется по структуре реферата заданное преподавателем.

Итого		*N=26ч*	
Итого по дисциплине		*N=52 ч.*	

8.3. Методические рекомендации по подготовке письменных работ

Реферат — письменная работа объемом 10-18 печатных страниц, выполняемая студентом в течение модульного срока. Структура реферата:

1. Титульный лист.
2. После титульного листа на отдельной странице следует оглавление (план, содержание), в котором указаны названия всех разделов (пунктов плана) реферата и номера страниц, указывающие начало этих разделов в тексте реферата.
3. После оглавления следует введение. Объем введения составляет 1,5-2 страницы.
4. Основная часть реферата может иметь одну или несколько параграфов (подпунктов, разделов) и предполагает осмысленное и логичное изложение главных положений и идей, содержащихся в изученной литературе.
5. Заключение содержит главные выводы, и итоги из текста основной части, в нем отмечается, как выполнены задачи и достигнуты ли цели, сформулированные во введении.
6. Приложение может включать решение математических задач.
7. Библиография (список литературы).

8.4. Иные материалы

Для самостоятельной работы студентам задаются индивидуальные задачи для решения по пройденным темам.

1. Вычислить предел функции

1. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$
2. $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+7}-2}$
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2-5x+1}{3x+7}$
4. $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}$
5. $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$
6. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$
7. $\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$
8. $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$
9. $\lim_{x\to 0}\frac{tgx-sinx}{x^3}$
10. $\lim_{x\to 0}\frac{x-sin2x}{x+sin3x}$

Теорема сложения и умножения вероятностей.

1. В урне 4 белых и 6 черных шаров. Из урны вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.
2. В урне 4 белых и 6 черных шаров. Из урны вынимается один шар, отмечается его цвет и шар возвращается в урну. После этого из урны берется еще один шар. Найти вероятность того, что оба вынутые шара будут белыми.
3. В урне 4 белых и 6 черных шаров. Из урны вынимаются сразу два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.
4. В урне 4 белых и 6 черных шаров. Из урны вынимаются два шара последовательно, и после вынимания первый шар возвращается в урну. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

5. В урне 4 белых и 6 черных шаров. Из урны в случайном порядке, один за другим вынимают все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.
6. В урне 4 белых и 6 черных и 5 красных шаров. Три из них вынимаются наугад. Найти вероятность того, что по крайней мере два из них будут одноцветными.
7. Имеется коробка с 9 новыми теннисными мячами. Для игры берут по 3 мяча, после игры их кладут обратно. При выборе мячей игранные от неигранных не отличают. Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется неигранных мячей?
8. Бросаются две монеты. Рассматриваются события: А – выпадение герба на первой монете, В – выпадение герба на второй монете. Найти вероятность события С+А+В.
9. Два стрелка, независимо один от другого, делают по два выстрела (каждый по своей мишени). Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка 0,7, для второго 0,8. Выигравшим соревнование считается тот стрелок, в мишени которого будет больше пробоин. Найти вероятность того, что выиграет первый стрелок.
10. Из полной колоды карт (52 карты) вынимают одновременно 4 карты. Рассматриваются события: А – среди вынутых карт будет хотя бы одна бубновая, В – среди вынутых карт будет хотя бы одна червонная. Найти вероятность события С=А+В.

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории оснащены необходимой мебелью, доской, соответствуют правилам противопожарной безопасности. Для самостоятельной работы студентов имеется компьютерные классы с доступом к сети Интернет.

10. Глоссарий

1. **Аксиоматическое определение вероятности** — отношение подмножества, благоприятствующего событию к общему множеству.
2. **Асимметрия** — отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднеквадратического отклонения.
3. **Бесповторная выборка** — выборка, при которой отобранный объект после проведения обследований не возвращается в генеральную совокупность.
4. **Вероятность** — отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов.
5. **Внутрнгрупповая дисперсия** — средняя арифметическая групповых дисперсий, взвешенная по объемам групп.
6. **Выборка** — совокупность случайно отобранных из изучаемой совокупности объектов.
7. **Геометрическое определение вероятности** — отношение длины отрезка к длине отрезка L.
8. **Гистограмма** — ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат интервалы длиною h, а высоты n.
9. **Групповая дисперсия** — дисперсия значений признака, принадлежащих группе, относительно групповой средней.
10. **Групповая средняя** — среднее арифметическое значений признака, принадлежащих группе.
11. **Двумерная случайная величина** — величина, имеющая два аргумента.
12. **Дискретная случайная величина** — величина, принимающая отдельные значения с определенными вероятностями.
13. **Дисперсия** — математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.
14. **Доверительный интервал** — интервал, который покрывает неизвестный параметр θ с заданной надежностью y.
15. **Достоверное событие** — событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий.
16. **Закон распределения случайной величины** — соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.
17. **Интервальная оценка** — оценка, которая определяется концами интервала.
18. **Конкурирующая гипотеза** — гипотеза противоречащая основной.

19. **Корреляционная зависимость** — зависимость, при которой при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой.
20. **Корреляционный момент** — характеристика связи между двумя случайными величинами.
21. **Коэффициент вариации** — выраженное в процентах отношение выборочного среднего квадратического отклонения к выборочной средней.
22. **Коэффициент корреляции** — отношение ковариации к произведению средних квадратических отклонений двух случайных величин.
23. **Критическая область** — совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.
24. **Математическое ожидание** — число, относительно которого стабилизируется среднее арифметическое возможных значений случайной величины при достаточно большом количестве испытаний.
25. **Межгрупповая дисперсия** — дисперсия групповых средних относительно общей средней.
26. **Мода** — варианта ряда, которая имеет наибольшую частоту.
27. **Моменты случайных величин** — характеристики случайных величин, определяющие математическое ожидание k-й степени отклонения случайной величины.
28. **Непрерывная случайная величина** — величина, принимающая значения, сколь угодно мало отличающиеся друг от друга.
29. **Несмещенная оценка** — оценка θ^*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру θ.
30. **Нулевая гипотеза** — основная выдвинутая гипотеза.
31. **Общая дисперсия** — дисперсия значений признака всей совокупности относительно общей средней.
32. **Плотность распределения вероятностей** — вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение на указанном интервале.
33. **Повторная выборка** — выборка, при которой отобранный объект возвращается после проведения обследования обратно в генеральную совокупность.
34. **Полигон частот** — ломаная линия, отрезки которой соединяют точки (x_1, n_1).
35. **Производящая функция** — функция, определяющая вероятность наступления события при различных вероятностях появления в каждом испытании.
36. **Размах варьирования R** — разность между наибольшей и наименьшей вариантой.
37. **Регрессия** — представление одной случайной величины как функции другой.
38. **Случайная величина** — величина, которая в результате испытания примет одно и только одно значение до опыта не известно какое.
39. **Состоятельная оценка** — оценка, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.
40. **Статистическая гипотеза** — гипотеза о виде неизвестного распределения, или параметрах неизвестного распределения.
41. **Статистический критерий** — случайная величина, служащая для проверки нулевой гипотезы.
42. **Статистическое распределение выборки** — перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.
43. **Стохастическая зависимость** — зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение другой.
44. **Теорема Лапласа** — определение вероятности наступления события в k измерениях из n (при больших k и n).
45. **Теория вероятностей** — наука, изучающая общие закономерности случайных явлений массового характера.
46. **Точечная оценка** — оценка, которая определяется одним числом.

47. **Условная вероятность** — вероятность наступления интересующего нас события, связанная с дополнительными условиями.
48. **Формула Байеса** - определение апостериорной (послеопытной) вероятности на основе априорной (доопытной) на основе проведения эксперимента.
49. **Формула Бернулли** — определение вероятности наступления события в измерениях из n.
50. **Функция распределения** — функция, определяющая вероятность того, что X примет значение меньше x.
51. **Характеристики положения** — характеристики, определяющие наиболее возможные значения случайной величины.
52. **Характеристики рассеивания** — характеристики, определяющие разброс возможных значений случайной величины.
53. **Центральная предельная теорема** — теорема, доказывающая, что суммирование большого числа случайных величин с различными законами распределения приводит в итоге к нормальному распределению.
54. **Эксцесс распределения** — величина, определяемая отношением центрального момента четвертого порядка к четвертой степени среднего квадратического отклонения за вычетом тройки.
55. **Эффективная оценка** — такая оценка, которая при заданном объеме выборки n имеет наименьшую возможную дисперсию.