МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
НЕКОММЕРЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
УЧЕБНО-НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ КОМПЛЕКС
«МЕЖДУНАРОДНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ КЫРГЫЗСТАНА»

«СОГЛАСОВАНО»
Проректор по учебно-административной работе НОУ УНПК «МУК»,
д.и.н., доцент Муса кызы Алина
«16» октября 2020 г.

«УТВЕРЖДЕНО»
Ректор НОУ УНПК «МУК»,
к.т.н., доцент Савченко Е.Ю.
«16» октября 2020 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Название дисциплины: МАТЕМАТИКА

Название и код направления подготовки: 530500 ЮРИСПРУДЕНЦИЯ

Квалификация выпускника: Бакалавр

Форма обучения: Очная

Составитель: Кожомбердиева Н.Б., ст. преподаватель

График проведения модулей

1 семестр

недели	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
лекзан.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
сем. зан.	1	1	1	1	1	1	1	М	1	1	1	1	1	1	1	М	1

«РАССМОТРЕНО»
На заседании кафедры
«Естественно-научные дисциплины»
НОУ УНПК «МУК»
Протокол № 2
от «12» 10 2020 г.
И.о.зав.кафедрой, ст.преп.
Касмалиева Дж.С.

«ОДОБРЕНО»
На заседании Учебно-методического объединения НОУ УНПК «МУК»
Протокол № 5
от «15» октября 2020 г.
Председатель Учебно-методического объединения
Матвеева Т.В.

«СОГЛАСОВАНО»
Директор Научной библиотеки
НОУ УНПК «МУК»
Асанова Ж.Ш.

Бишкек 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. АННОТАЦИЯ…….....3
1.1. Миссия и Стратегия……3
1.2. Цель и задачи дисциплины (модулей)…… 3
1.3. Формируемые компетенции, а также перечень планируемых (ожидаемых) результатов обучения по дисциплине (модулю) (знания, умения владения), сформулированные в компетентностном формате……..4
1.4. Место дисциплины (модулей) в структуре основной образовательной программы……..4
2. СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЕЙ)……5
3. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЕЙ)……....6
4. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ……7
5. ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ……..36
6.ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО, РУБЕЖНОГО И ИТОГОВОГО КОНТРОЛЕЙ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЕЙ)……37
6.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения дисциплины……...37
6.2. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности……37
6.3. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания……39
6.4. Контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности……39

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ……..44
7.1. Список источников и литературы……44
7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимый для освоения дисциплины (модулей)……44

8. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ……..44

8.1. Планы практических (семинарских) и лабораторных занятий. Методические указания по организации и проведению……44
8.2. Методические указания для обучающихся, по освоению дисциплины (модулей)…….46

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЕЙ)……47
10. ГЛОССАРИЙ……..48
11. ПРИЛОЖЕНИЯ……..48

1. АННОТАЦИЯ

Дисциплина «Математика» - это составляющая фундаментальной подготовки будущего специалиста, предлагаемый курс предусматривает изучение вопросов о месте и роли математики современном мире.

Изучение математические методы призвано повысить умение логически мыслить студентов. Для юристов (для адекватного понимания смысла текста) еще важно умение оперировать с большими числами и быстро переходить от абсолютных значений к относительным (на душу населения или на единицу площади государства, региона). Нужно не только уметь производить несложные формальные расчеты, но и быстро оценивать требуемые величины без вычислений. Юристы необходимо знать те разделы математики, где эти вопросы изучаются в наиболее явном виде.

1.1.Миссия и стратегия

Миссия. *«Подготовка международно - признанных, свободно мыслящих специалистов, открытых для перемен и способных трансформировать знания в ценности на благо развития общества»*

<u>Стратегия развития</u> ***НОУ УНПК «МУК»*** - *создание динамичного и креативного университета с инновационными научно-образовательными программами и с современной инфраструктурой, способствующие достижению академических и профессиональных целей.*

1.2.Цель и задачи дисциплины (модулей)

Образовательной целью освоения дисциплины является:

- Обеспечить глубокими научными знаниями и обобщенными навыками естественно-научных дисциплин;
- Подготовка юриста, способного использовать основные законы естественно-научных дисциплин, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при изучении смежных дисциплин, а также в познавательной и будущей профессиональной деятельности;
- Знать общечеловеческие идеи, которые в жизни переплетаются, а в математике выражены наиболее явно, а также понимать и свободно использовать именованные и абстрактные числа и геометрические понятия в своей деятельности.
- углубление математического образования и развитие практических навыков в области прикладной математики, изучение теоретических основ создания комплексов программ в многопроцессорных вычислительных системах.

Задачи дисциплины:

- ознакомление обучающихся с процессом разработки математических методов;
- создание условий для изучения обучающимися процесса разработки математических моделей, методов при решении различных задач научных исследований;
- формирование способности к применению на практике, в том числе умения составлять математические типовых профессиональных задач и находить способы их решений; интерпретировать профессиональный (физический) смысл полученного математического результата;
- формирование умения применять аналитические и численные методы решения поставленных задач.

1.3. Формируемые компетенции, а также перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю) (знания, умения владения), сформулированные в компетентностном формате.

1. Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины.

Студент в результате освоения дисциплины «Математики» должен обладать следующими универсальными компетенциями:

- общенаучными (ОК):

➢способен использовать базовые положения математических /естественных/ гуманитарных/ наук при решении профессиональных задач (ОК-2);

➢способен на научной основе оценивать свой труд, оценивать с большой степенью самостоятельности результаты своей деятельности (ОК-6).

- инструментальными (ИК):

➢способен к восприятию, обобщению и анализу информации, постановке цели и выборе путей ее достижения (ИК-1);

➢способен участвовать в разработке организационных решений (ИК-6).

2. В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

Знать:

О месте и роли математики в современном мире, мировой культуре и истории; о роли математики и информатики в гуманитарных исследованиях;

об основных математических методах; математические методы, используемые в судебно-экспертных исследованиях; математические доказательства; основные идеи математического анализа; элементы теории вероятностей; основные понятия математической статистики;

уметь:

использовать методы математического моделирования в юридической деятельности; выбирать методы моделирования систем; использовать современные информационно-коммуникационные технологии в юридической деятельности; применять современные информационные технологии для поиска и обработки правовой информации, оформления юридических документов и проведения статистического анализа информации;

владеть:

основными методами математической обработки информации; методами математической логики; навыками применения есественнонаучных методов исследования при расследовательской работе;

1.4. Место дисциплины (модулей) в структуре ООП ВПО

Учебная дисциплина «Математика» относиться к вариативной части профессионального цикла бакалаврской программы «Математика».

Изучение дисциплины «Математика» требует предварительных знаний следующих курсов «Методы оптимизации», «Дифференциальные уравнения», «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Дискретная математика» в объеме, предусмотренном направлением подготовки 010400.68 – «Прикладная математика и информатика»

Раздел2. Структура дисциплины (модулей)

Структура дисциплины (модулей) для очной формы обучения

Общая трудоемкость дисциплины составляет _2__ кредитах, _34__ ч., в том числе аудиторная работа обучающихся с преподавателем__9ч., **СРС** обучающихся __17_ ч.

№ п/п	Раздел, Темы Дисциплины	**Семестр**	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Формы текущ. контроля усп-ти (по нед семе-ра) Форма пром. атт-ции(по сем.)
				лек	пр	срс	СРСи П	
1-модуль								**80балл**
1.	О месте и роли математики в современном мире.	**1**	**1**	1	1	1		
2.	Основные понятие матрицы.		1	1	1	1		Тест
3.	Определители.		1	1	1	1		
4.	Минор матрицы.		1	1	1	1		Самостоятельная работа
5.	Невырожденные матрицы.		1	1	1	1	1	
6.	Система линейных алгебраических уравнений.		1	1	1	1	1	Контрольная работа
7.	Понятие о теории множеств.		1	1	1	1	1	
8.	Числа. Числовые послед-сти.		1	1	1	1	1	
2-модуль								**80балл**
9.	Системы координат.		1	1	1	1		
10.	Непрерывность функции. Производная функции.		1	1	1	1	1	Тест
11.	Дифференцируемость функций.		1	1	1	1	1	
12.	Исследование функции.		1	1	1	1	1	
13.	Первообразная функция.		1	1	1	1	1	Самостоятельная работа
14.	Методы интегрирование.		1	1	1	1	1	
15.	Определенный интеграл.		1	1	1	1	1	
16.	Элементы комбинаторики.		1	1	1	1		Контрольная работа
17.	Итоговая		1	1	1	1		
	Всего			**17**	**17**	**17**	**9**	

Раздел3. Содержание дисциплины (модулей)

Содержание дисциплины (модулей) должно состоять из разделов, соответствующих структуре дисциплины, подразделов и отдельных тем с той степенью подробности, которая, по мнению преподавателя-составителя, оптимально способствуют достижению цели и реализации поставленных задач.

№	Наименование раздела, темы дисциплины	Краткое содержание
	1-Модуль	
1.	**Глава1.** О месте и роли математики в современном мире. Основы алгебры.	Элементы алгебры. Матрицы.
2.	Действия над матрицами.	Сложение, вычитание, умножение.
3.	Определители. Правила треугольника.	Определители 2- 3-го порядка. Свойства определителей.
4.	Минор матрицы.	Алгебраическое дополнение.
5.	Невырожденные матрицы.	Обратная матрица.
6.	**Глава2.**Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	Метод Крамера. Метод Гаусса.
7.	**Глава3.**Операции над множествами.	Сложение, вычитание, разность
8.	Числа. Числовые последовательности.	Предел последовательности. Свойства предела последовательности.
	2-Модуль	
9.	**Глава4.** Системы координат. Понятие функции.	Предел функции. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.
10.	Непрерывность функции. Производная функции.	Основные формулы производной.
11.	Дифференцируемость функций.	Понятие дифференциала функции. Дифференциал аргумента. Дифференциал функции.
12.	Исследование функции с помощью производной.	Полное исследование, схема исследования функции.
13.	Первообразная функция.	Неопределенный интеграл. Основные формулы интегрирования.
14.	Методы интегрирование.	Интегрирование методом замены переменных. Интегрирование “по частям”.
15.	Определенный интеграл.	Формула Ньютона-Лейбница. Методы интегрирования определенного интеграла.
16.	**Глава5.** Элементы комбинаторики.	Перестановка. Сочетание. Размещение. Основы теории вероятностей.

17.	Итоговая работа	**Контрольная работа**

Раздел4. Конспект лекций

Лекция №1. Основы алгебры. Элементы алгебры. Матрицы. Основные понятия.

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращенно, $A = (a_{ij})_{mxn}$ где $i = \overline{1,m}$ (т.е. $i = 1,2,3,...,m$)- номер строки, $j = \overline{1,n}$ $(m.e.\ \ j = 1,2,3,...n)$-номер столбца.

Матрицу A называют матрицей размера $m\,x\,n$ и пишут A_{mxn}. Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее элементами. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего угла, образуют *главную* диагональ. А с верхнего правого в левый нижний образуют *побочную* диагональ.

Виды матриц:

Определение1. Матрица A называется *квадратной*, если число строк равно числу столбцов т.е. $(m = n)$ и имеет вид:

Определение2. Квадратную матрицу размера $n\,x\,n$ называют матрицей $n-го$ порядка.

Определение 3. Две матрицы одинакового размерности $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называются *равными*, если все элементы $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1,m},\quad j = \overline{1,n}$ с одинаковыми индексами обеих матриц совпадают.

Определение 4. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали a_{ii}, равны нулю, называется *диагональной* и имеет вид:

Определение5. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной,* обозначается буквой *E* и имеет вид:

Определение 6. Квадратная матрица называется *треугольной*, если все её элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю и имеет вид: Так, матрица - верхнетреугольная, а матрица - нижетреугольная.

Определение7. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой. Обозначается буквой *O* и имеет вид:.

Определение 8. Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется вектором (или вектор-столбец, или вектор- строка соответственно). Их вид: - матрица -столбец, - матрица- строка.

Лекция №2. Действия над матрицами.

1.Сложение и вычитание матриц

Операция сложения (вычитание) матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой (разностью) двух матриц одного порядка $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называется матрица того типа, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц слагаемых. Таким образом, $A_{mn}\pm B_{mn}=C_{mn},\quad c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij},\quad i=1,2,...,m;\quad j=1,2,...,n.$

2.Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число λ каждый элемент матрицы умножается на это число –это новая матрица $B=\lambda A=(\lambda a_{ij})=(b_{ij})$.

Следствия:

1. Если $\lambda=0,$ то $0\cdot A=O$ - нулевая матрица.
2. Если $\lambda=-1$ $(-1)\cdot A=-A$ - матрица, противоположная матрице A.

3.Умножение матриц

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

4.Возведение в степень.

С введением операции умножения матриц появилась возможность рассматривать возведение матрицы в степень $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot ...\cdot A}_{n\,раз}$, $n\in N,\quad A-$квадратная матрица.

5. Транспонирование матрицы

Определение11. Матрица полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей *транспонированной* к данной. Обозначается A^T. итак,

Определение 12. Квадратная матрица A называется ***симметричной,*** если $A\cdot A^T$.

Матрица $\rightarrow$ $A=\begin{pmatrix}2&2&4\\2&0&3\\4&3&5\end{pmatrix}$ - симметричная. У каждой симметричной матрицы элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой.

Лекция №3. Определители 2-3-го порядка. Свойства определителей.

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число $\det A=|A|=\Delta$, называемое её определителем, так же определитель матрицы называют её *детерминантом* следующим образом:

Определениие1. Определителем матрицы первого порядка $n=1$, составленным из чисел $A=(a_{11})$ называют число $\det A=a_{11}$.

Определение2. Определителем матрицы второго порядка $n=2$, составленным из чисел $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ называют число $\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$

Для вычисление определителя второго порядка удобна следующая схема:

$$\begin{vmatrix}\bullet&\bullet\\\bullet&\bullet\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bullet&\bullet\\\bullet&\bullet\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\bullet&\bullet\\\bullet&\bullet\end{vmatrix}$$

<u>Пример2</u>. Найти определители матриц: 1) $A=\begin{pmatrix}x&-y\\y&x\end{pmatrix}$.

Решение: 1) $\det A = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2$

Однако известны методы, позволяющие реализовать вычисление определителей высоких порядков на основе определителей низших порядков. Один из методов основан на свойстве разложения определителя по элементам некоторого ряда.

Определение3. Определителем матрицы третьего порядка $n = 3$, составленным из чисел $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называют число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}. (*) \quad (*)$$

называют вычисление определителя 3-го порядка *правилом треугольника или Саррюса*.

Также при вычислении определителя 3-го порядка удобно схема, называемая правилом треугольника или Саррюса, которое символически можно записать так:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

Определение 3. Определителем матрицы третьего порядка $n = 3$,составленным из чисел $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называют число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} (**)$$

(**) называют разложением определителя 3-го порядка ***по элементам первой строки.***

Лекция №4. Минор матрицы. Алгебраическое дополнение.

Определение1. *Минором* некоторого элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из определителя $|A|$ вычеркиванием $i-ой$ строки и $j-го$ столбца. Обозначается M_{ij}. Так, если

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Определние2. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i+j$ -четное число, и со знаком «минус», если

эта сумма нечетная. Обозначается $A_{ij}:\quad A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$. Так, $A_{11}=+M_{ij},\quad A_{12}=-M_{ij},\quad A_{13}=+M_{ij}$

Лекция №5. Невырожденные матрицы. Обратная матрица.

Пусть A - квадратная матрица $n-го$ порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Определение1. Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если определитель не равен нулю: $\Delta=\det A\neq 0.$ В противном случае $\Delta=\det A=0$,матрица называется *вырожденной* или особенной.

Определение2. Союзная к матрице A, называется матрица A^* имеет вид: $A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, где A_{ij} -алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A (оно определяется так, как и алгебраическое дополнение элемента определителя).

Обратная матрица. Из элементарной математики известно, что $\forall a\neq 0,\quad a\cdot a^{-1}=1$.

Определение3. Квадратная матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрице A, если выполняется условие $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot E$, где E - единичная матрица того порядка, что и матрица A. Матрицы A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A.

Теорема. Всякая невырожденная матрица имеет обратную A^{-1}, если существует и единственна тогда и только тогда, когда $\Delta=\det A\neq 0.$

Обратная матрица вычисляется по формуле: $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A^*$, где A^* - союзная к матрица A.

1) Вычислим $\det A$:

2) Вычислим алгебраические дополнения A_{ij} :

3) Находим союзную матрицу A^*, к матрице A.

4) Вычислим обратную матрицу A^{-1}:

Лекция №6. Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера.

Определение1. Уравнение, содержащее неизвестные $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ только в первой степени, называется линейным.

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида $\begin{cases} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \dots+ & a_{1n}x_n= & b_1, \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \dots+ & a_{2n}x_n= & b_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \dots+ & a_{mn}x_n= & b_m. \end{cases}$ (1.1).

или сокращенной записи $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_n = b_i, \quad i = \overline{1,m}.$ (1.2) где числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$ называется коэффициентами системы, b_i - свободными членами,

а x_n -неизвестный. Здесь коэффициенты и свободные члены – известные числа.

Определение2 (1.1) система называется ***квадратной системой,*** если $m = n$, т.е. число уравнений равно числу неизвестных.

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - (1.1) ***основная матрица*** системы.

$$\overline{A}_{mxn} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ - (1.1) ***расширенная матрица*** системы.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - (1.1) вектор-столбец из неизвестных x_j.

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$ - (1.1) вектор-столбец из свободных членов b_i.

(1.1) систему удобно записывать в компактной ***матричной форме.*** $A \cdot x = b$ (1.3).

(1.1) система эквивалентна системе (1.3) и (1.3) называется ***матричным уравнением.***

Две системы называются эквивалентными, если они имеют одно и то же общее решение.

Теорема Кронекера- Капелли: **Теорема1:** Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы $r(\overline{A}) = r(A)$.

Теорема2: Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение. т.е. $r = n$.

Теорема3: Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений. т.е. $r < n$.

В определителе Δ, заменив элементы j-го столбца свободными членами b_1, b_2, b_3 получим определители : $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

Если определитель системы (2.1) $\Delta = \det A \neq 0$,то система совместной, тогда система имеет единственное решение. т.е. $r = n$.

П р а в и л о К р а м е р а : Если определитель системы (2.1) $\Delta = \det A \neq 0$,то система совместной, итак, невырожденная система содержащей m уравнений и n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера. т.е. $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \ (j = 1,2,3)$ (2.3) .

В определителе Δ, заменив элементы j -го столбца свободными членами $b_1, b_2, ..., b_m$ получим определители : $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ а, по формуле Крамера находим : $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ..., \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$.

3. Метод гаусса. Метод гаусса – метод последовательного исключения неизвестных. Этот метод является универсальным, потому, что позволяет решать системы любого числа уравнений с любым числом неизвестных, а если система не имеет решения, то метод позволяет установить это в ходе решения.

Сущность метода в том, что посредством элементарных преобразований система приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) неизвестных, находятся все остальные неизвестные.

Уравнение, с помощью которого преобразуется система называется **ключевым (или разрешающим),** а неизвестная $x_i, i = 1,2,...,n$ в ключевом уравнении, с помощью которой она исключается из всех последующих уравнений системы, называется **разрешающей**; коэффициент $a_{ij} \neq 0$ при разрешающей неизвестной x_i, называется **разрешающим**; столбец коэффициентов при разрешающей неизвестной называется **ключевым (или разрешающим)** столбцом.

На практике элементарным преобразованиям подвергают не систему уравнений, а ее расширенную матрицу. Применительно к матричной записи вычислительная процедура гауссовских исключений формализуется посредством простых правил.

Первый шаг (исключение неизвестной x_1) выполняется с разрешающим элементом a_{11}, второй шаг (исключение x_2) – с элементом a'_{22} и т.д. (разрешающими являются диагональные элементы матрицы). Каждая строка и каждый столбец в ходе гауссовских преобразований могут побывать в роли ключевых один раз. Пересчет же элементов матрицы на каждом шаге выполняется по следующим правилам:

1. Элементы ключевой строки и выше расположенных строк остаются неизменными;

2. Элементы ключевого столбца, расположенные ниже разрешающего элемента, обращаются в нули;

3. Все прочие элементы матрицы вычисляются по правилу прямоугольника: преобразованный элемент равен разности произведений элементов главной и побочной диагонали:

$a'_{ij} = a_{ks} a_{ij} - a_{kj} a_{is}$.

Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений состоит из **прямого** и **обратного хода.**

Определение: Приведение системы к равносильной системе к треугольному или ступенчатому виду называется ***прямым ходом метода Гаусса***, а нахождение неизвестных из системы - ***обратным ходом.***

Рассмотрим следующие важные два случая:

1. Если ранг совместной системы равен числу переменных, т.е. $r = n$, то система имеет единственное решение и имеет **треугольный вид.**

2. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений, т.е. $r < n$ и (4.1) система имеет **ступенчатый вид.**

На практике элементарные преобразования удобно проводить с помощью расширенной матрицы системы.

Лекция №7

Множества. Действительные числа. Основные понятия.

Множество — один из ключевых объектов математики, в частности, теории множеств и логики. Под ***множеством*** понимают совокупность(собрание, класс, семейство…) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Так можно говорить о множестве студентов института, о множестве корней уравнения $x^2+2x+2=0$, о множестве всех натуральных чисел и.т.д. Объекты, из которых состоит множество, называется его ***элементами или точками множества.*** Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, ..., X, Y$, а их элементы – малыми буквами $a, b, ..., x, y, ...$

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$; запись $x \overline{\in} X$ или $x \notin X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым,*** обозначается символом - $\varnothing$.

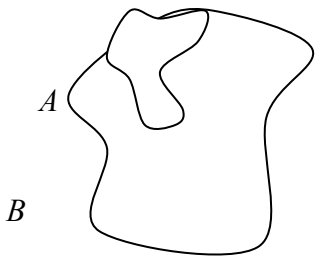
Элементы множества записывают в фигурных скобках, внутри которых они перечислены, либо указано общее свойство, которым обладают все элементы данного множества.

Например, запись $A=\{1;3;15\}$ означает, что множество A состоит из трех чисел 1;3 и 15; запись $A=\{x: 0 \le x \le 2\}$ означает, что множество A состоит из всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $0 \le x \le 2$.

Множество A называется ***подмножеством*** множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Символически это обозначают так $A \subset B$(« A включено в B») или $B \supset A$(« множество B включает в себя множество A»).

Говорят, что множества A и B ***равны*** или ***совпадают***, и пишут $A=B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Другими словами, множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными.

$A \subset B$



Объединением (или суммой) множеств A и B называется множество, состоящее, из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному их этих множеств. Объединение (сумму) множеств обозначают $A \cup B$(или $A+B$). Кратко можно записать $A \cup B = \{x: x \in A$ или $x \in B\}$.

Пересечением (или произведением) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству A и множеству B. Пересечение (произведение) множеств обозначают $A \cap B$ (или $A \cdot B$). Кратко можно записать $A \cap B = \{x: x \in A \quad и \quad x \in B\}$.

Дальнейшем для сокращения записей будем использовать некоторые простейшие ***логические символы:*** $\forall$ - означает «для любого», «для всякого»;

$\exists$ - «существует», «найдет»; **:** - «имеет место», «такое что»; $\mapsto$ - «соответствие»;

$\Rightarrow$ - следует; $\Leftrightarrow$ - равносильно; $\equiv$ - тождественно равно; $\wedge$ - и; $\vee$ - или;

Теоретико - множественные символы:

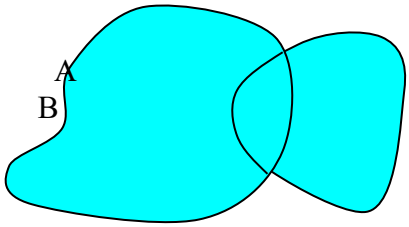
$\cup$ - объединение; $\cap$ - пересечение; $\in$ - принадлежит; $\notin$ - не принадлежит;

$\varnothing$ - пустое множество; $\subset$ - включает, входит; \ - разность.

В настоящее время, теорию множеств Кантора принято называть *наивной теорией множеств*, а вновь построенную *аксиоматической теорией множеств*.

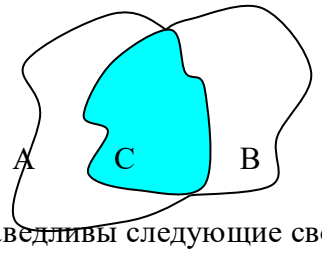
Операции над множествами

Объединением множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A и B. Обозначается $C = A \cup B$.



Геометрическое изображение множеств в виде области на плоскости называется **диаграммой Эйлера – Венна**.

Пересечением множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат каждому из множеств A и B. Обозначение $C = A \cap B$.



Для множеств A, B и C справедливы следующие свойства:

$A \cap A = A \cup A = A$; $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

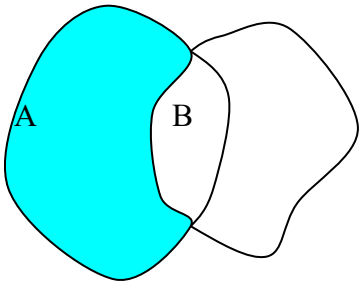
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

$A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$;

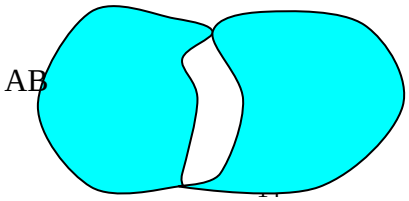
$A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$;

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B. Обозначается $C = A \setminus B$.

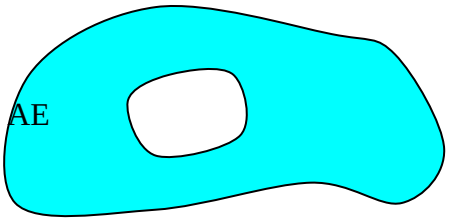


Симметрической разностью множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат в точности одному из множеств A или B.Обозначается $A \Delta B$.

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



<u>Определение.</u> C_E называется **дополнением** множества A относительно множества E, если A $\subseteq$ E и C_E = E \ A.



Для множеств A, B и C справедливы следующие соотношения:

A \ B $\subseteq$ A; A \ A = $\varnothing$; A \ (A \ B) = A $\cap$ B;

A Δ B = B Δ A; A Δ B = (A $\cup$ B) \ (A $\cap$ B);

<u>Пример 1.</u> Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество и проверить его с помощью диаграммы Эйлера - Вейна.

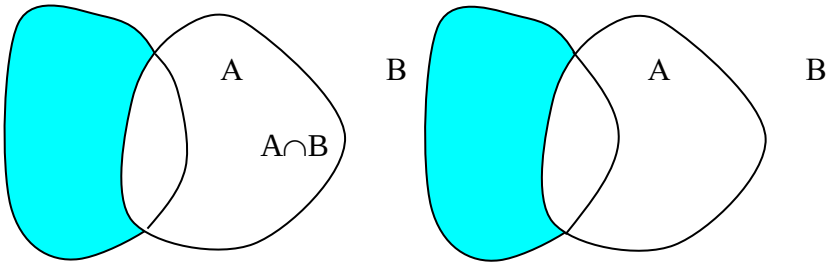
$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

Из записанных выше соотношений видно, что

$A \setminus (A \cap B) = (A \setminus A) \cup (A \setminus B) = \varnothing \cup (A \setminus B)$ = A \ B

Что и требовалось доказать.

Для иллюстрации полученного результата построим диаграммы Эйлера – Вейна



Лекция №8. Числа. Числовые множества. Множество действительных чисел

Множества, элементами которых является числа, называются числовыми. Примерами числовых множеств является:

$N = \{1; 2; 3; ...; n; ...\}$ - множество натуральных чисел;

$Z_0 = \{0; 1; 2; ...; n; ...\}$ - множество целых неотрицательных чисел;

$Z_0 = \{0; \pm 1; \pm 2; ...; \pm n; ...\}$ - множество целых чисел;

$Q = \left\{ \frac{m}{n}; m \in Z, n \in N \right\}$ - множество рациональных чисел.

R - множество действительных чисел.

Числовые промежутки. Окрестность точки.

Пусть a и b -действительные числа, причем $a < b$.

Числовыми промежутками (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a;b] = \{x : a \le x \le b\}$ -отрезок (сегмент, замкнутый промежуток);

$(a;b)=\{x: a<x<b\}$-интервал (открытый промежуток);
$[a;b]=\{x: a\le x<b\}$;
$(a;b]=\{x: a<x\le b\}$- полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые отрезки);
$(-\infty;b]=\{x: x\le b\}$; $[a,+\infty)=\{x: x\ge a\}$;
$(-\infty;b)=\{x: x<b\}$; $(a,+\infty)=\{x: x>a\}$;
$(-\infty,\infty)=\{x: -\infty<x<+\infty\}=R$-бесконечные интервалы (промежутки).

Числовая последовательность

Переменная x есть *упорядоченная переменная величина*, если известна область ее изменения, и про каждые из двух любых ее значений можно сказать, какое из них предыдущее и какое последующее.

Частным случаем упорядоченной переменной величины является переменная величина, значения которой образуют *числовую последовательность* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Для таких величин при $i<j$, $i,j\in N$ значение x_i считается предшествующим, а x_j – последующим независимо от того, какое из этих значений больше. Таким образом, числовая последовательность – это переменная величина, последовательные значения которой могут быть перенумерованы.

Определение1. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана **последовательность**

$\{x_n\}=x_1, x_2, ..., x_n$

Отдельные числа последовательности называются ее *элементами*.

Общий элемент последовательности является функцией от n.

$x_n = f(n)$

Таким образом последовательность может рассматриваться как функция порядкового номера элемента.

Задать последовательность можно различными способами – главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности.

Например, числовую последовательность образуют следующие величины:

1) $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...\right\}$,

2) $\{x_n\}=\{n+(-1)^n\}=\{0,3,2,5,4,...\}$,

3) $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$ или $\{x_n\}=\{-1;1;-1;1;...\}$.

Для последовательностей можно определить следующие **операции**:

1)Умножение последовательности на число m: $m\{x_n\}=\{mx_n\}$, т.е. $mx_1, mx_2, \ldots$

2) Сложение (вычитание) последовательностей: $\{x_n\}\pm\{y_n\}=\{x_n+y_n\}$.

3) Произведение последовательностей: $\{x_n\}\cdot\{y_n\}=\{x_n\cdot y_n\}$.

4) Частное последовательностей: $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}}=\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ при $\{y_n\}\ne 0$.

Понятие предела числовой последовательности

Начнем с понятия предела числовой последовательности.

Определение1. Число ***a*** называется ***пределом*** последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство: $|x_n - a| < \varepsilon$.

В этом случае записывается: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный числу a.

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ **сходится** к a при $n \to \infty$.

Коротко определение предела можно записать так:

$(\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Примеры:

Используя определение предела числовой последовательности, доказать что,

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$.

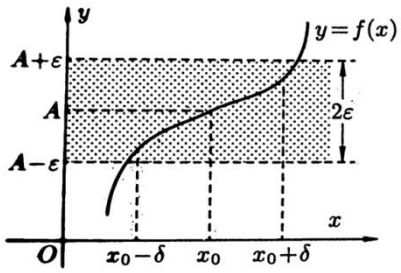
Лекция №9. Системы координат. Понятие функции. Предел функции. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Предположим, что независимая переменная x неограниченно приближается к числу x_0. Это означает, что мы можем придавать x значения сколь угодно близкие к x_0, но не равные x_0. Будем обозначать это так $x \to x_0$. Для таких x найдем соответствующие значения функции.

<u>Определение1.</u> (на «языке последовательностей», или по Гейне). Число A называется **пределом** функции $y = f(x)$ в точке x_0 при $x \to x_0$, если для любой последовательности допустимых значений аргумента x_n, $n \in N$ ($x_n \neq x_0$), сходящейся к x_0 (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in N$, сходится к числу A (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$).

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Геометрический смысл предела функции: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ означает, что для всех точек x, достаточно близких к точке x_0, соответствующие значения функции как угодно мало отличается от числа A.



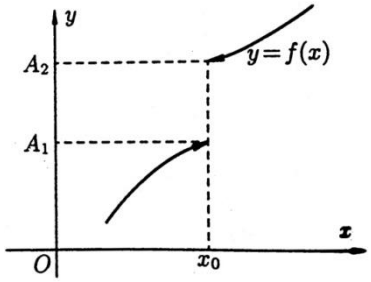


Рис.2 Рис.3.

Примеры:

1) Найти предел функции $y = 2x + 1$ при $x \to 1$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1) = 3$,

2) Найти предел функции $y = e^{x+1}$ при $x \to 0$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0} e^{x+1} = e$.

Бесконечно большие функции и их связь с <u>бесконечно малыми</u>

Определение. Предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, где x_0 - число, **равен бесконечности**, если для любого числа М $M > 0$ существует такое число $\delta = \delta(M) > 0$, что неравенство $|f(x)| > M$, выполняется при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$.

Записывается $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)| > M$ на $f(x) > M$, то получим: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$,

а если заменить на $f(x) < M$, то: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:

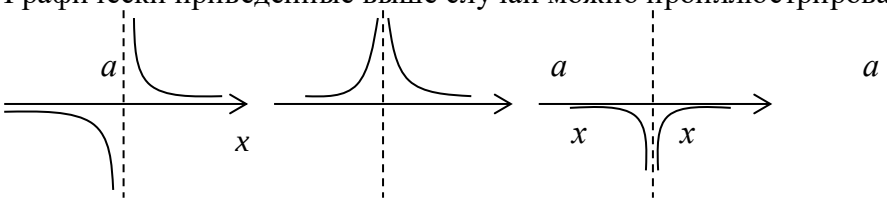


Рис.4.

Например, 1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$. 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$.

<u>Основные теоремы о пределах.</u>

<u>Теорема 1.</u> $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$, где $C = const$.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \to x_0$.

<u>Теорема 2.</u> Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

<u>Теорема 3.</u> Предел произведения двух функций равен произведению пределов: $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

<u>Следствие1.</u> Функция может иметь только один предел при $x\to x_0$.

<u>Теорема4.</u> Постоянный множитель можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{x\to x_0} C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

<u>Следствие2.</u> Предел степени с натуральным показателем равен то же степени предела: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n$.

В частности, $\lim\limits_{x\to x_0} x^n=x_0^n$, $n\in N$.

<u>Теорема 5.</u> Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

<u>Определение.</u> Функция $f(x)$ называется **ограниченной** вблизи точки $x=x_0$, если существует такое число $M>0$, что $|f(x)|<M$ вблизи точки $x=x_0$.

<u>Теорема 6.</u> *Если функция* $f(x)$ *имеет конечный предел при* $x\to x_0$*, то она ограничена вблизи точки* $x=x_0$.

Примеры:

1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{5n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}}{5+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{3}{5}.$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-8}{4x^2+7x-12}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x^2-\lim\limits_{x\to 0}8}{\lim\limits_{x\to 0}(4x^2)+\lim\limits_{x\to 0}(7x)-\lim\limits_{x\to 0}12}==\frac{2}{3}.$$

Типы неопределенностей и способы их раскрытия. Правила Лопиталя.

Часто при вычислении пределов какой-либо функции, непосредственное применение теорем о пределах не приводит к желаемой цели. Так, например, нельзя применять теорему о пределе дроби, если ее знаменатель стремится к нулю. Поэтому часто прежде, чем применять эти теоремы, необходимо тождественно преобразовать функцию, предел которой мы ищем. Условные выражения: $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty};0\cdot\infty;\infty-\infty;1^{\infty};0^0;\infty^0$ характеризуют типы неопределенностей и применяются для обозначения переменных величин, при вычислении предела которых нельзя сразу применять общие свойства пределов. Рассмотрим некоторые приемы раскрытия неопределенностей.

I. **Неопределенность вида** $\frac{0}{0}$**.** Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь.

Примеры: Найти пределы.
Разложим числитель и знаменатель на множители.

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{3-2}{3+3}=\dfrac{1}{6}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Помножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=-1.$$

II. Неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. При вычислении предела данной дроби разделим числитель и знаменатель на x в старшей степени.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+3}{x+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{1-0+0}{0+0}=\infty.$$

III. Неопределенность вида $0\cdot\infty$.

$$\lim_{x\to\pi}\sin x\cdot ctgx=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x\cos x}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\pi}\cos x=-1$$

IV. Неопределенность вида $\infty-\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)}=-2{,}5.$$

Лекция №10

Непрерывные функции. Непрерывность функции в точке. Производная функции. Основные формулы производной.

Представление о непрерывности функции интуитивно связано у нас с тем, что её графиком является плавная, нигде не прерывающаяся линия. При рассмотрении графика такой функции $y=f(x)$ мы видим, что близким значениям аргумента соответствуют близкие значения функции: если независимая переменная x приближается к точке x_0, то значение функции $y=f(x)$ неограниченно приближается к значению функции в точке x_0, т.е. к $f(x_0)$.

Дадим строгое определение непрерывности функции. Итак, пусть имеем функцию $y=f(x)$ (рис.6).

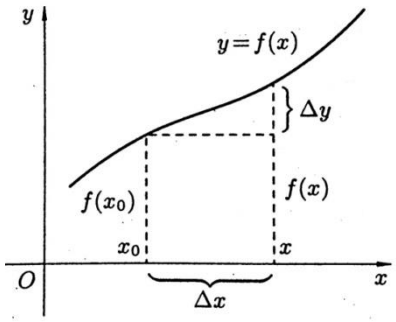


Рис.6.

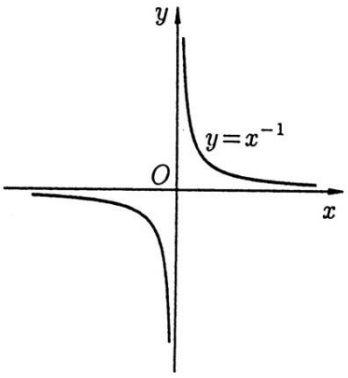


Рис.7.

Определение1: Функция $y = f(x)$ *называется непрерывной в точке* $x = x_0$, если она определена в этой точке и в некоторой окрестности содержащей x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. **(1).**

Таким образом, можно сказать, что функция непрерывна в точке x_0, если выполнены 3 условия:

1. функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой её окрестности;
2. функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$;
3. этот предел равен значению функции в точке x_0.

Определение2: Функция $y = f(x)$ *называется непрерывной в точке* $x = x_0$, если она в этой точке определена и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. x_0 и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. (2).

Теорема. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

2. Непрерывность функции в интервале и на отрезке

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в интервале $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна в интервале $(a;b)$ и в точке $x = a$ непрерывна справа т.е. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, а в точке $x = b$ непрерывна слева т.е. $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$.

Пример1: Дана функция $y = x^2 + 2x - 4$ найти приращение Δy при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}5$

Найдем наращенное значение функции, соответствующее приращению Δx:

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) - 4 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x - 4$ Находим приращение функции: $y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x - 4$ $\underline{- \; y = x^2 + 2x - 4}$

$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta x = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}5 + (0{,}5)^2 + 2 \cdot 0{,}5 = 3{,}25$

Пример2: Исследовать на непрерывность функции $y = 3x^2 - 6x$

Дадим аргументу x приращение Δx и найдем приращение функции Δy:

$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 6(x + \Delta x) = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 6x - 6\Delta x$

$$\begin{array}{l} - \quad y = 3x^2 - 6x \\ \hline \Delta y = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 6\Delta x \end{array};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 6\Delta x = 6x \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 6 \cdot 0 = 0$$

Производная. Понятие производной является одним из основных математических понятий. Производной широко используется при решении целого ряда задач математики, физики, других наук, в особенности при изучении скорости разных процессов.

Скорость изменения функции. Вычисление скорости изменения функции $y = f(x)$ производится по следующему общему правилу:

1. Изменение аргумента x на некоторую величину Δx вызовет изменение функции y на величину Δy, т.е. $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

2. Находится приращение функции Δy, соответствующее приращению аргумента Δx:

$$\begin{array}{l} y + \Delta y = f(x + \Delta x) \\ - \quad y = f(x) \\ \hline \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \end{array}.$$

3. Средняя скорость изменения функции y для промежутка значений аргумента от x до $x + \Delta x$ выражается отношением $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ показывает, сколько единиц приращения функции приходится на единицу приращения аргумента

4. Мгновенная (или истинная) скорость изменения функции при данном значении x есть предел, к которому стремится средняя скорость $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ в промежутке изменения аргумента от x до $x + \Delta x$, т.е. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Для линейной функции $y = kx + b$ средняя скорость $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ и истинная скорость $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ совпадают по величине и числовое значение истинной скорости равно коэффициенту k.

Пример: Найти среднюю скорость изменения функции $y = 3x^2 - 6$ при изменении x от $x_1 = 3$ до $x_2 = 3{,}5$.

1.Способ. Найдем приращение аргумента: $\Delta x = x_2 - x_1 = 3{,}5 - 3 = 0{,}5$.

Найдем значение функции при x_1 и x_2:

$y(x_1) = 3 \cdot 3^2 - 6 = 21; \quad y(x_2) = 3 \cdot (3{,}5)^2 - 6 = 30{,}75$.

$\Delta y = y_2 - y_1 = 30{,}75 - 21 = 9{,}75$.

Находим среднюю скорость $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9{,}75}{0{,}5} = 19{,}5$.

2. Способ. Вычислим среднюю скорость изменения функции при любом значении аргумента по общему правилу:

$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 6 = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 6$

- $y = 3x^2 - 6$

$\Delta y = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2$;

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$.

Найдем приращение аргумента: $\Delta x = x_2 - x_1 = 3{,}5 - 3 = 0{,}5$.

Вычислим $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $x = 3$ и $\Delta x = 0{,}5$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x = 6 \cdot 3 - 3 \cdot 0{,}5 = 19{,}5$.

№1. Прямолинейное движение точки задано уравнением $s = 3t^2 - 2t + 5$ (t выражено в секундах, а s - в метрах). Найти скорость движения точки в момент $t = 5$. Отв: 28(м/с).

№2. Найдите среднюю скорость изменения функции $y = 2x^2 + 5x$ при изменении x от $x_1 = 2$ до $x_2 = 3$. Отв: 15.

№3. Закон движение точки задан формулой $s = 4t^2 - 2$ (t выражено в секундах, а s - в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки за промежуток времени от $t_1 = 4$ до $t_2 = 6$. Отв: 40 (м/с).

Лекция №11. Дифференцируемость функций. Понятие дифференциала функции. Дифференциал аргумента. Дифференциал функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $(a;b)$.
Проделаем следующие операции:

-аргументу $x \in (a;b)$ дадим приращение $\Delta x : x + \Delta x \in (a;b)$;

-найдем соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

-составим отношение приращение функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

-найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0 : \lim\limits_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если этот предел существует, то его называют производной функции $f(x)$ и обозначают одним из символов $f'_x f'(x); y'; \frac{dy}{dx}; y'_x$.

Производной функции $y = f(x)$ в **точке** x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Итак, по определению

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

Производная функции $f(x)$ есть некоторая функция $f'(x)$, произведенная из данной функции.

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a;b)$, называется ***дифференцируемой*** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***.

Значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ обозначается одним из символов: $f'(x_0), y'|_{x=x_0}$ или $y'(x_0)$.

Пример **.**Найти производную функции и дифференциал функции $y = x^2$.

Решение:

- Аргументу x даем приращение Δx;
- находим $\Delta y : \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$;
- составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;
-находим предел этого отношения:

$$\lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом, $(x^2)' = 2x$, $dy = 2xdx$

Вычисление производной функции $y = f(x)$ производится по общему правилу дифференцирования:

1. Придавая аргументу x приращение Δx и подставляя в выражение функции вместо аргумента x наращенное значение $x + \Delta x$, находим наращенное значение функции: $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

2. Вычитая из наращенного значения функции ее первоначальное значение, находим приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

3. Делим приращение функции Δy на приращение аргумента Δx, т.е. составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

4. Находим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, т.е. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Этот предел и есть производная от функции $y = f(x)$.

Пример: Найти $y'(3)$, если $y = 2x^2 - 3x$.

1) Находим производную по общему правилу:

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) = 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x$$

$$- \quad y = 2x^2 - 3x$$

$$\Delta y = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x$$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x - 3$;

3) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4x + 2x\Delta x - 3) = 4x - 3$;

4) $y' = 4x - 3$.

5) Найдем значение производной при $x = 3$: $y'(3) = 4 \cdot 3 - 3 = 9$.

Таблица производных для функций независимой переменной – и для сложных функций

x - независимая перепенная

1. $C' = 0 \qquad (C - Const)$
2. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
3. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a, \ \left(e^{x}\right)' = e^{x}$
4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \ \left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$
5. $\left(\sin x\right)' = \cos x$
6. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$
7. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
12. $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
13. $\left(shx\right)' = chx$
14. $\left(chx\right)' = -shx$
15. $\left(thx\right)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$
16. $\left(cthx\right)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}$

$u = u(x)$ - зависимая переменная

1. $\left(c\right)' = 0$
2. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
3. $\left(a^{u}\right)' = a^{u} \cdot u' \cdot \ln a, \ \left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'$
4. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u', \ \left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
5. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
6. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$
7. $\left(tgu\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
8. $\left(ctgu\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
9. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
10. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11. $\left(arctgu\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
12. $\left(arcctgu\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
13. $\left(shu\right)' = chu \cdot u'$
14. $\left(chu\right)' = -shu \cdot u'$
15. $\left(thu\right)' = \dfrac{1}{ch^2 u} \cdot u'$
16. $\left(cthu\right)' = -\dfrac{1}{sh^2 u} \cdot u'$

Лекция №12. Полное исследование функции с помощью производной. Схема исследования функции.

Функции $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** на интервале $(a;b)$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу и таких, что $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей*** на интервале $(a;b)$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу и таких, что $x_1 < x_2$ имеет место неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.
Как возрастающие, так и убывающие функции называются ***монотонными***, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает, - промежутками *монотонности.*

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком её производной:

Теорема.1 (необходимые условия). Если дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ возрастает $f'(x) \geq 0$; если же $f'(x) \leq 0$, то функция убывает для $\forall x \in (a;b)$.

Теорема.2 (достаточные условия). Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ для $\forall x \in (a;b)$, то эта функция возрастает и убывает на интервале $(a;b)$.

Исследовать монотонности следующих функций:

Пример1. $f(x) = x^2 - 8x + 12$,

Функция определена $R = (-\infty;\infty)$. Её производная равна:

$f'(x) = 2x - 8$, $f'(x) = 0$, $2x - 8 = 0$, $x = 4$;

$f'(x) > 0$ при $x \in (4;\infty)$;

$f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty;4)$.

x	$(-\infty;4)$	4	$(4;\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↓	-4	↑

Ответ: Итак, на интервале $(4;\infty)$ функция возрастает, а $(-\infty;4)$ - убывает.

Пример2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$

Функция определена $R = (-\infty;\infty)$. Её производная равна:

$f'(x) = 3x^2 - 12x$, $f'(x) = 0$, $3x^2 - 12x = 0$, $x = 0$, $x = 4$;

$f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty;0) \cup (4;\infty)$;

$f'(x) < 0$ при $x \in (0;4)$.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;4)$	4	$(4;\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	4	↓	-28	↑

Ответ: Итак, на интервале $(-\infty;0)$ и $(4;\infty)$ функция возрастает, а $(0;4)$ - убывает.

Примеры:

Исследовать следующих функций на возрастание и убывание:

1. 1) $f(x) = x^2 - 6x + 5$; 2) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$; 3) $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.

2. 1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$; 2) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2$.

3. 1) $f(x) = x^4 - 4x + 3$; 2) $f(x) = x^4 - 32x + 40$; 3) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - x + 1$;

4. 1) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 15$; 2) $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 20$.

5. 1) $f(x) = -\frac{1}{x}$; 2) $f(x) = \frac{1}{3x-2}$; 3) $f(x) = \frac{1}{2x}$.

6. 1) $y = \ln x^2$; 2) $y = \ln \frac{1}{x}$; 3) $y = \ln x$.

Исследование функции на экстремума с помощью первой производной

Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется точкой ***минимума*** этой функции, если существует такая δ - окрестность $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется точкой ***максимума*** этой функции, если существует такая δ - окрестность $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Точки минимума и максимума функции называются ***экстремальными точками*** (или точками экстремума) данной функции, а значения функции в этих точках- минимумом и максимумом (или экстремумами) функции.

Точками экстремума могут служить только ***критические точки***, т.е.точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Рассмотрим условия существования экстремума функции.

Теорема.1 (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то её производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Теорема.2 (достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ - окрестности критической точки x_0 и при переходе через неё производная $f'(x)$ меняет знак, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум: минимум в том случае, когда производная меняет знак с минуса на плюс, и максимум – когда с плюса на минус.

Если же при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ не меняет знака, то функция $f(x)$ в точке x_0 не имеет экстремума.

Правила для исследования функции $y = f(x)$ на экстремум при помощи первой производной (первый способ).

1. Найти $f'(x)$ - первую производную функции.

2. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. в которых $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв $f'(x) = 0$.

3. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. При этом критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) < 0$, от промежутка, в котором $f'(x) > 0$, и точка максимума – противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не меняет.

4. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Пример. Исследовать на экстремум следующие функции: $f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f'(x) = 0$, $3x^2 - 6x = 0$, $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2. \end{array}\right.$

x	$-\infty < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$2 < x < \infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\uparrow$	$f_{\max} = f(0) = 0$	$\downarrow$	$f_{\min} = f(2) = -4$	$\uparrow$

Исследуйте на экстремум следующие функции:

10. 1) $f(x) = x^2 - x$; 2) $f(x) = x^2 + 3x$; 3) $f(x) = -x^2 + 2x$.

11. 1) $f(x) = x^2 - 8x + 12$; 2) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $f(x) = x^2 - 10x + 9$.

12. 1) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$; 2) $f(x) = -x^2 - x + 6$; 3) $f(x) = -2x^2 + x + 1$.

Лекция №13. Первообразная функция. Неопределенный интеграл. Основные формулы интегрирования.

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ в промежутке $a \le x \le b,$ если в любой точке этого промежутка ее производная равна $f(x)$:

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx, \quad a \le x \le b.$$

Отыскание первообразной функции по заданной ее производной $f(x)$ или по дифференциалу $f(x)dx$ есть действие, обратное дифференцированию,- интегрирование.

Совокупность первообразных для функции $f(x)$ или для дифференциала $f(x)dx$ называется неопределенным интегралом и обозначается символом $\int f(x)dx.$ Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \textit{или} \quad d[F(x) + C] = f(x)dx.$$

Здесь $f(x)$-подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение;

C - произвольная постоянная.

Приведем основные свойства неопределенного интеграла:

1^0. *Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:* $\int dF(x) = F(x) + C.$

2^0. *Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:*

$$d\int f(x)dx = f(x)dx, \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

3^0. *Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:*

$$\int [f(x) + \varphi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx.$$

4^0. *Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:*

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

5^0. *Если* $\int f(x)dx = F(x) + C \quad u \quad u = \varphi(x)$ *- любая известная функция, имеющая непрерывную производную, то* $\int f(u)du = F(u) + C.$

Основные формулы интегрирования

(Табличные интегралы)

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \quad \left(\int dx = x + C\right);$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

4. $\int e^x dx = e^x + C;$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \left(\int shx dx = chx + C\right);$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C \quad \left(\int chx dx = shx + C\right);$

7. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C;$

8. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C;$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C \quad \left(\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C\right);$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C \quad \left(\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C\right);$

11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C;$

12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C;$

15. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C;$

16. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C;$

17. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C;$

18. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Примеры: №1) $\int x\left(3x^{-4} + 8x^{-5}\right)dx$; 2) $\int\left(x^{-4} - x^{-3} - 3x^2 + 1\right)dx$; 3) $\int\left(4u^3 - 6u^2 - 4u + 3\right)du.$

№2 $\int x^4(x-1)dx$; 2) $\int(2x-1)^3 dx$; 3) $\int\left(5u^{3/2} - 7u^{3/4}\right)du$; 4) $\int nx^{n-1}dx$; 5) $\int \frac{2\varphi - 3\varphi^3}{5\varphi} d\varphi.$

№3 $\int \frac{\left(x^{1/2} - x^{1/3} + x^{1/4}\right)}{x^2}dx$; 2) $\int\left(\frac{3}{t^2} - \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{4\sqrt[3]{t^2}}{t}\right)dt$; 3) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2}}$; 4) $\int \frac{d\varphi}{2\sqrt{\varphi}}$; 5) $\int \frac{dt}{t^2}.$

Лекция №14. Интегрирование методом замены переменных. Интегрирование “по частям”.

<u>1. Интегрирование методом замены переменной (способ подстановкой)</u>

Сущность интегрирования методом замены переменной (способом подстановки) заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ *в интеграл* $\int F(u)du$,
который легко вычисляется по какой-либо из основных формул интегрирования.

Для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ заменяем переменную x новой переменной u с помощью подстановки $x=\varphi(u)$. Дифференцируя это равенство, получим $dx=\varphi'(u)du$. Подставляя в подынтегральное выражение вместо x и dx их значения, через u и du, имеем $\int f(x)dx=\int f[\varphi(u)]\varphi'(u)du=\int F(u)$. После того как интеграл относительно новой переменной u будет найден, с помощью подстановки $u=\psi(x)$ он приводится к переменной x.

1) $\int(3x+2)^5dx=\left|\begin{matrix}3x+2=t, 3dx=dt\\ dx=\frac{1}{3}dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\int t^5dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^6}{6}+C=\frac{(3x+2)^6}{18}+C;$

2) $\int(2x^3+1)^4x^2dx=\left|\begin{matrix}2x^3+1=t, 6x^2dx=dt\\ x^2dx=\frac{1}{6}dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{6}\int t^4dt=\frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5}+C=\frac{(2x^3+1)^5}{30}+C;$

3) $\int\frac{xdx}{(x^2+1)^3}=\int(x^2+1)^{-3}xdx=\frac{1}{2}\int t^{-3}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-2}}{(-2)}+C=-\frac{(x^2+1)^{-2}}{4}+C=\frac{-1}{4(x^2+1)^2}+C;$

Найдите следующие интегралы:

№1 1) $\int(7-2x)^3dx$; 2) $\int(5t-1)^4dt$; 3) $\int\frac{dx}{(4-3x)^2}$; 4) $\int\frac{dz}{(5z+1)^3}$; 5) $\int\frac{6z^2dz}{(1-2z^3)^4}$.

№2 1) $\int\sqrt[3]{(3x+1)^2}dx$; 2) $\int\sqrt{2x-1}dx$; 3) $\int\sqrt[3]{(4-3t)^2}dt$; 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^3}}$; 5) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-5)^2}}$.

№3 1) $\int(x^2+3)^5xdx$; 2) $\int4(x^4-1)^2\cdot x^3dx$; 3) $\int\sqrt{4x^3+1}\cdot x^2dx$; 4) $\int\sqrt{(x^4-1)^3}\cdot x^3dx$.

№4 1) $\int\sqrt{2\sin x-1}\cos xdx$; 2) $\int\sqrt{e^x+1}\cdot e^xdx$; 3) $\int\sqrt{(3z^4+2)^3}z^3dz$; 4) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.

№5 1) $\int\frac{x^3dx}{(5x^4+3)^5}$; 2) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{(5x^4+2)^2}}$; 3) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(x^3-1)^3}}$; 4) $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{1-\sin x}}$;

2. Метод интегрирования по частям

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv)=u\cdot dv+v\cdot du$ Интегрируя это равенство, получим
$\int d(uv)=\int u\cdot dv+\int v\cdot du$ *или* $\int udv=u\cdot v-\int vdu.$

Полученная формула называется *формулой интегрирования по частям*. Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv (это, как правило, можно осуществить несколькими способами); затем, после нахождения

$v \quad u \quad du,$ используется формула интегрирования но частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.
Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

Примеры:

1) $\int (2x-1)e^{3x}dx = \begin{bmatrix} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix} = \frac{(2x+1)}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}dx = \frac{(2x+1)e^{3x}}{3} - \frac{2}{9}e^{3x} + C$

2) $\int \ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{bmatrix} = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - x + C$

3) $\int x^2 e^x dx = \begin{bmatrix} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{bmatrix} = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x, du = dx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{bmatrix} = x^2 e^x - 2xe^x - 2e^x + C.$

Лекция №15. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.

1.Определенный интеграл и его непосредственное вычисление.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $a \le x \le b$. Разобьем этот отрезок на n частей точками $a < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, выберем на каждом элементарном отрезке $x_{k-1} \le x \le x_k$ произвольную точку ξ_k и обозначим через Δx_k длину каждого такого отрезка. *Интегральной суммой* для функции $f(x)$ отрезке $a \le x \le b$ называется сумма вида $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ отрезке $a \le x \le b$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится нулю: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

Для любой функции $f(x),$ непрерывной на отрезке $a \le x \le b,$ всегда существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx.$

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий интеграл $F(x),$ служит формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$ т.е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Примеры:

1) $\int\limits_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{6};$

2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4};$

3) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2} arctg\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4})) = \frac{\pi}{4};$

4) $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x|\ \Big|_e^{e^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

<u>2. Вычисления определенного интеграла. Интегрирование подстановкой (заменой переменной).</u>

Методом вычисления определенного интеграла является формула Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$ Пусть для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(t).$

Теорема. Если: 1) *функция* $x = \varphi(t)$ *и ее производная* $x' = \varphi'(t)$ *непрерывны при* $t \in [\alpha;\beta]$;

2) *множеством значений функции* $x = \varphi(t)$ *при* $t \in [\alpha,\beta]$ *является отрезок* $[a;b]$;

3) $\varphi(\alpha) = a$ *и* $\varphi(\beta) = b,$ *то* $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$ $(*)$

Пусть *F(x)* первообразная для *f(x)* на отрезке $[a;b]$.Тогда по формуле Ньютона-Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$ *Так как* $\left(F(\varphi(t))\right)' = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t),$ *то* $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t),\quad t \in [a;b].$ Поэтому по формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Формула $(*)$ называется ***<u>формулой замены переменной в определенном интеграле.</u>*** Отметим, что:

1) при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется;
2) часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют подстановку $t = g(x);$
3) не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных!

Примеры:

$\int\limits_2^3 (2x-1)^3\, dx;$ введем новую переменную с помощью подстановки $2x - 1 = t.$ Дифференцируя, имеем $2dx = dt,$ *откуда* $dx = (1/2)dt.$ Находим новые пределы интегрирования. Подставляя в соотношение $2x - 1 = t$ *значения* $x = 2$ *и* $x = 3,$

соответственно получим

6) $$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{1+x}=t\,, 1+x=t^2,\, dx=2tdt \\ x=t^2-1,\, x=3 \Rightarrow t=2,\, x=8 \Rightarrow t=3 \end{array} \right| = 2\int_2^3 \frac{\left(t^2-1\right)\cdot tdt}{t} = 2\int_2^3 \left(t^2-1\right)dt = 2\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_2^3 = \frac{32}{3}$$

7) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \left| \begin{array}{c} \cos x = \dfrac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}\,, z=tg\dfrac{x}{2},\ \dfrac{x}{2}=arctgz,\ dx=\dfrac{2dz}{1+z^2}, \cos x=\dfrac{1-z^2}{1+z^2} \\ z=tg\dfrac{x}{2},\quad x=0 \quad\Rightarrow\quad z=0,\quad x=\dfrac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad z=1. \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2+\dfrac{1-z^2}{1+z^2}} \cdot \frac{2dz}{1+z^2} = 2\int_0^1 \frac{dz}{z^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{z}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Лекция 16. Элементы комбинаторики. Основы теории вероятностей.

1. Элементы комбинаторики.

Группы, составленные из каких-либо элементов, называются ***соединениями.*** Различают три основных вида соединений: *размещения, перестановки и сочетания.*

Задачи, в которых производится подсчет возможных различных соединений, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу, называются ***комбинаторными задачами.*** Раздел математики, в которой изучаются комбинаторные задачи и занимающийся их решением, называется ***комбинаторикой.***

С комбинаторными вычислениями приходится иметь дело представителям многих специальностей. Комбинаторика находит широкое применение при решении многих задач теории вероятностей - важного раздела современной математики, посвященного изучению закономерностей случайных явлений.

Для решения комбинаторных задач созданы общие методы и выведены готовые формулы.

Основной принцип комбинаторики (правило умножения).

Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие - n_2 способами, третье - n_3 способами и так до k - го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k ***действий*** вместе могут быть выполнены $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_k$ способами.

Например, В группе 20 студентов. Нужно выбрать актив группы в составе старосты, его заместителя и кассира. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. При выборе старосты есть 20 различных возможностей. После того как староста выбран, для выбора его заместителя остается 19 возможностей, а для выбора кассира - 18 возможностей. Применяя правило умножения, находим, что для выбора актива группы число возможностей равно произведению $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.

1. Размещения.

Размещением из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле

$A_n^m = n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)]$. (1.1)

Примеры:

№1. Сколько различных трехцветных флагов с гремя горизонтальными полосами можно получить, если использовать четыре цвета?

Решение. $A_4^3 = \frac{4!}{1!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

№2. Студенту необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней:

а) Сколькими способами это можно сделать?

б) Сколькими способами это можно сделать, если известно, что последний экзамен будет сдаваться на восьмой день?

Решение.

а) $A_8^4 = \frac{8!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$; б) $4 \cdot A_7^3 = 4 \cdot \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$.

2. Перестановки.

Перестановками из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n.

Перестановки представляют частный случай размещений из n элементов по n в каждом, т.е.

$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)...1 \cdot 2 \cdot 3$ или $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3...(n-1)n$. (1.2)

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно. Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3...(n-1)n$ обозначают символом $n!$ (читается «n- факториал»), причем полагают $0! = 1$, $1! = 1$. Поэтому равенство (1.2) можно переписать в виде $P_n = n!$. (1.3).

Используя формулу (1.3), формуле (1.1) можно придать вид $A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$ (1.4).

При решении задач используется равенство $A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m$. (1.5).

Например, из трехэлементного множества $\{a,b,c\}$ можно составить 6 различных упорядоченных множеств $(a,b,c); (a,c,b); (b,c,a); (b,a,c); (c,b,a); (c,a,b)$. Следовательно, $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

№3. Сколько различных трехцветных флагов с тремя горизонтальными полосами можно получить, если использовать три цвета?

Решение. $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

№4. Сколькими способами можно рассадить 7 гостей на имеющихся 7 различных стульях?

Решение. $P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

3. Сочетания.

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m и вычисляется по формуле $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$ или $C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$. (1.6) .

Кроме того, при решении задач используется следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний: $C_n^m = C_n^{n-m} \quad (0 \le m \le n)$ (1.7) (по определению полагают $C_n^n = 1$ и $C_n^0 = 1$);

$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$. (1.8).

№5. Из 20 студентов нужно выделить 6 человек для участия в соревнованиях. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. $C_{20}^6 = \frac{20!}{14!\cdot 6!} = 38760$.

2. Основы теории вероятности. Случайные события и вероятность события

1. Случайные события. Многие явление в окружающем нас мире – в природе, технике сельском хозяйстве и в других областях носят случайный характер, а именно, если явление наблюдать один раз, то нельзя точно предсказать, как оно протекать. Но если это явление наблюдать многократно при неизменных условиях, то оказывается, что явление можно описать с помощью чисел, т.е. количественно. Оказывается, что достаточное большое число однородных случайных событий независимо от их конкретной природы подчиняется определенным закономерностям, а именно вероятностным закономерностям. Установлением этих закономерностей и занимается теории вероятностей. Теории вероятностей дает математической модели для описания случайных явлений.

Определение. Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности. Т.е. в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда.

В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие A может произойти совместно с событием В, в другом – нет.

2. Классическое определение вероятности (относительная частота, свойство устойчивости), геометрическое определение вероятности.

Определение. Элементарными исходами опыта называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие A, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие.

Совокупность всех элементарных исходов опыта называется пространством элементарных событий.

Определение. Вероятностью события A называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность к события A равна отношению числа, благоприятствующих событию A исходов опыта общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$P(A)=\frac{m}{n}$ Исход опыта является благоприятствующим событию A, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события A. Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, т.е. $P(A)=1$, а вероятность невозможного – равна нулю $P(A)=0$. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$0 \le P(A) \le 1$

Пример:

1. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Решение.

Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара – событие A, появление зеленого – событие B, появление белого – событие C.

Тогда в соответствием с записанными выше формулами получаем:

$P(A)=\frac{3}{10}$, $P(B)=\frac{2}{10}$, $P(C)=\frac{5}{10}$.

Отметим, что вероятность наступления одного из двух попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Раздел5. Информационные и образовательные технологии

В разделе УМК даются пояснения по организации всех видов учебной работы, методам их проведения, с учетом значимости в изучении дисциплины (модулей) и прогнозируются ожидаемые результаты.

Например:

Информационные и образовательные технологии

№ п/п	**Наименование раздела**	**Виды учебной работы**	**Формируемые компетенции (указывается код компетенции)**	**Информационные и образовательные технологии**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1.	**Глава1.** Основы алгебры. Элементы линейной алгебры	Лекция 1. Семинар 1. Самостоятельная работа	ОК-2, ОК-6, ИК-6 ОК-2, ОК-6, ИК-6 ОК-2, ОК-6, ИК-6	Вводная лекция с использованием видеоматериалов Развернутая беседа с обсуждением доклада Консультирование и проверка домашних заданий посредством электронной почты
2.	**Глава2.** Система линейных уравнений(СЛАУ)	Лекция 2. Семинар2. Самостоятельная работа	ОК-2, ОК-6, ИК-6 ОК-2, ОК-6, ИК-6	Лекция-визуализация с применением слайд-проектора Подготовка к занятию с использованием электронного курса лекций

3.	**Глава3.** Множества. Действия над множествами.	Лекция 3. Семинар 3. Самостоятельная работа	ОК-2, ОК-6, ИК-6	Дискуссия Подготовка к занятию с использованием электронного курса лекций
4.	**Глава4.** Система координат. Понятие функции. Производной. Интеграл.	Лекция 4. Практическое занятие 1. Самостоятельная работа	ОК-2, ОК-6, ИК-6	Проблемная лекция Занятия на тренажерах Консультирование и проверка домашних заданий посредством электронной почты
5.	**Глава5.** Элементы комбинаторики.	Лекция 5.	ОК-2, ОК-6, ИК-6	Лекция с разбором конкретных ситуаций

Раздел6. Фонд оценочных средств для текущего, рубежного и итогового контролей по итогам освоению дисциплины (модулей)

6.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения дисциплины

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения дисциплины представляется в виде таблицы:

№ п/п	Контролируемые разделы дисциплины (модулей)	Код контролируемой компетенции (компетенций)	Наименование оценочного средства
1.	Элементы линейной алгебры	ОК-2, ОК-6	Оценка анализа, умение навыка студента решением письменной модульной или тестовым контролем.
2.	Система линейных уравнений(СЛАУ)	ОК-2, ОК-6	Контроль усвоения учебного материала тестированием или проведением письменной контрольной работы.
3.	Понятие функции. Производной. Интеграл.	ОК-2, ОК-6	Оценка анализа, умение навыка студента решением письменной модульной или тестовым контролем.
4.	Элементы комбинаторики.	ОК-2, ОК-6	Контроль усвоения учебного материала тестированием или проведением письменной контрольной работы.

6.2. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Методические материалы составляют систему текущего, рубежного и итогового (экзамена) контролей освоения дисциплины (модулей), закрепляют виды и формы текущего, рубежного и итогового контролей знаний, сроки проведения, а также его сроки и формы проведения (устный экзамен, письменный экзамен и т.п.). В системе контроля указывается процедура оценивания результатов обучения, при использовании балльно-рейтинговой системы

приводится таблица с баллами и требованиями к пороговым значениям достижений по видам деятельности обучающихся; показывается механизм получения оценки (из чего складывается оценка по дисциплине (модулю).

Например: (если 2 кредита)

Текущий контроль осуществляется в виде опроса, участие в дискуссии на семинаре, выполнение самостоятельной работы и других видов работ, указанных в УМК, а также посещаемости студентов занятий - оценивается до 80 баллов.

Рубежный контроль (сдача модулей) проводится преподавателем и представляет собой письменный контроль, либо компьютерное тестирование знаний по теоретическому и практическому материалу. Контрольные вопросы рубежного контроля включают полный объём материала части дисциплины (модулей), позволяющий оценить знания, обучающихся по изученному материалу и соответствовать УМК дисциплины, которое оценивается до 20 баллов.

Итоговый контроль (экзамен) знаний принимается по экзаменационным билетам, включающий теоретические вопросы и практическое задание, и оценивается до 20 баллов.

Форма контроля	Срок отчетности	Макс. количество баллов	
		За одну работу	Всего
Текущий контроль: - опрос - участие в дискуссии на семинаре - посещаемость	 1, 2, 3, 4 недели 3, 4, 5, 6, 7 недели 1,2,3,4,5,6,7,8 недель	 10 баллов 6 баллов 0,2	 До 40 баллов До 30 баллов 10 баллов
Рубежный контроль: (сдача модуля)	8 неделя	100%×0,2=20 баллов	
Итого за I модуль			До 100 баллов

Форма контроля	Срок отчетности	Макс. количество баллов	
		За одну работу	Всего
Текущий контроль: - опрос - участие в дискуссии на семинаре - посещаемость	 9, 10, 11, 12 недели 13, 14, 15, 16, 17 недели 9,10,11,12,13,14,15,16, 17 недели	 10 баллов 6 баллов 0,2	 До 40 баллов До 30 баллов 10 баллов
Рубежный контроль: (сдача модуля)	16 неделя	100%×0,2=20 баллов	
Итого за II модуль			До 100 баллов
Итоговый контроль (экзамен)	Сессия	ИК = Бср × 0,8+Бэкз × 0,2	

Экзаменатор выставляет по результатам балльной системы в семестре экзаменационную оценку без сдачи экзамена, набравшим суммарное количество баллов, достаточное для выставления оценки от 55 и выше баллов – автоматически (при согласии обучающегося).

Полученный совокупный результат (максимум 100 баллов) конвертируется в традиционную шкалу:

Рейтинговая оценка (баллов)	Оценка экзамена
От 0 - до 54	неудовлетворительно
от 55 - до 69 включительно	удовлетворительно
от 70 – до 84 включительно	хорошо

от 85 – до 100	отлично

6.3. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания (На усмотрение ППС)

Например:

Текущий контроль (0 - 80 баллов)

При оценивании посещаемости, опроса и участия в дискуссии на семинаре учитываются:

- посещаемость (… баллов)
- степень раскрытия содержания материала (… баллов);
- изложение материала (грамотность речи, точность использования терминологии и символики, логическая последовательность изложения материала (… баллов);
- знание теории изученных вопросов, сформированность и устойчивость используемых при ответе умений и навыков (… баллов).

Рубежный контроль (0 – 20 баллов)

При оценивании контрольной работы учитывается:

- полнота выполненной работы (задание выполнено не полностью и/или допущены две и более ошибки или три и более неточности) – … баллов;
- обоснованность содержания и выводов работы (задание выполнено полностью, но обоснование содержания и выводов недостаточны, но рассуждения верны) – … баллов;
- работа выполнена полностью, в рассуждениях и обосновании нет пробелов или ошибок, возможна одна неточность - … баллов.

Итоговый контроль (экзаменационная сессия) - ИК = Бср × 0,8+Бэкз × 0,2

При проведении итогового контроля обучающийся должен ответить на 3 вопроса (два вопроса теоретического характера и один вопрос практического характера).

При оценивании ответа на вопрос теоретического характера учитывается:

- теоретическое содержание не освоено, знание материала носит фрагментарный характер, наличие грубых ошибок в ответе (… балла);
- теоретическое содержание освоено частично, допущено не более двух-трех недочетов (… баллов);
- теоретическое содержание освоено почти полностью, допущено не более одного-двух недочетов, но обучающийся смог бы их исправить самостоятельно (… баллов);
- теоретическое содержание освоено полностью, ответ построен по собственному плану (… баллов).

При оценивании ответа на вопрос практического характера учитывается:

- ответ содержит менее 20% правильного решения (… балла);
- ответ содержит 21-89 % правильного решения (… баллов);
- ответ содержит 90% и более правильного решения (… баллов).

6.4.Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности.

Раздел УМК включает образцы оценочных средств, примерные перечни вопросов и заданий в соответствии со структурой дисциплины и системой контроля.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля
(в течении семестра по темам и модулям)

Контрольные вопросы 1-Модуля

1. Места и роли математики в современном мире.
2. Основы алгебры. Элементы алгебры. Матрицы.
3. Действия над матрицами.
4. Определители 2-3-го порядка. Свойства определителей
5. Минор матрицы. Алгебраическое дополнение.

6. Обратная матрица.
7. Система СЛАУ. Метод Крамера. Метод Гаусса.
8. Понятие о теории множеств. Операции над множествами.
9. Числа. Числовые последовательности. Предел последовательности.
10. Свойства предела последовательности.
11. Системы координат. Понятие функции. Предел функции.
12. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.

Тестовые задание 1-модуля

1) Даны множества $A=\{-6;-4;-2;3;7;10;15\}$ и
$B=\{-10;-5;-3;2;5;7;15\}$

Найти пересечение этих множеств.

a) $A\cap B=\{7;15\}$!

b) $A\cap B=\{3;7\}$

c) $A\cap B=\{7;10\}$

2) Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет:

a) Один предел !

b) Не имеет предела.

c) Два предела.

3) Последовательность, не имеющую предела называют:

a) Расходящиеся !

b) Сходящиеся,

c) Возрастающие.

4) Доказать, что последовательность $x_n=\dfrac{n}{n+1}$.

a) Убывающие,

b) Возрастающие,

c) Неубывающие,

5) Как называется приращением аргумента функции.

a) Разность двух значений аргумента x_1 и x_2 !

b) Разность двух значений функций $f(x_1)$ и $f(x_2)$,

c) Значение функции.

6) Вычислить пределы

$$\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right).$$

a)-5; b) 1; **c)** 5 **!**

7) Вычислить пределы

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3}.$$

a) 0; **b)** 1/3 **!** b) 1.

8) Найти определитель матрицы.

$$\begin{vmatrix}4 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}.$$

a) 10! b) 4; c) 0.

9) Найти определитель матрицы.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

a) 0. **b**) 9!; c) 12.

10) Вычислить предел функции по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$.

a) 9**; ! b)** 6**; c)** 1 / 2.

Контрольные вопросы 2- Модуля

1. Непрерывность функции. Производная функции.
2. Основные формулы производной.
3. Дифференцируемость функций. Понятие дифференциала функции.
4. Дифференциал аргумента. Дифференциал функции.
5. Полное исследование функции с помощью производной.
6. Схема исследования функции.
7. Первообразная функция. Неопределенный интеграл.
8. Основные формулы интегрирования.
9. Интегрирование методом замены переменных.
10. Интегрирование “по частям”.
11. Формула Ньютона-Лейбница.
12. Элементы комбинаторики. Перестановка. Размещение. Сочетание.
13. Основы теории вероятности.

Тестовые задание 2-модуля

1) Найти производную функции

$f(x)=\cos 4x+e^{2x}$

a. $-3^{\cos x}+e^{x}$.

b. $\sin x+2e^{x}$.

c. $-4\sin 4x+2e^{2x}$ **!**

2) Определить промежутки убывания функции $f(x)=2x^2-4x+5$**;**

a. $-\infty<x<1$**!**

b. $1<x<\infty$**;**

c. $(-\infty;1)$.

3) Определить промежутки возрастания функции $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+2$.

a) $0<x<1$ **! b)** $(-\infty;1)$**; c)** $1<x<\infty$

4) Когда функция $F(x)$**называется первообразная для функций** $f(x)$**.**

a) $f(x)+F(x)=0$**;**

b) $F(x)=2f(x)$**;**

c) $F'(x) = f(x)$ **!**

5) Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ **равна**

a) $ctgx$ **; b)** $-ctgx + C$ **; c)** $tgx + C$ **!**

6) Вычислить интеграл $\int 4(x^2 - x + 3)dx$ **.**

a) $\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + C$ **! b)** $x^3 - 2x^2 + 12x + C$ **; c)** $x^3 - 2x^2 + 3x + C$ **;**

7) Вычислить интеграл $\int (3^x - e^x - 1)dx$ **.**

a) $\frac{3^x}{\ln 3} - e^x + C$ **; b)** $3^x \ln 3 - e^x - x + C$**; c)** $\frac{3^x}{\ln 3} - e^x - x + C$ **!**

8) Вычислить интеграл $\int (4 - 3\cos x)dx$ **.**

a) $4x - 3\sin x + C$ **! b)** $4x + \sin x + C$**; c)** $4x + 3\cos x + C$ **.**

9) Вычислить интеграл $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$ **.**

a) 2; b) 0! c) 3;

10) Вычислить интеграл $\int_{-1}^{2} (x^2 + 2x + 1)dx$ **.**

a) 5; b) -9; c) 9!

Контрольные вопросы семестрового (итогового) контроля (по итогам изучения дисциплины)

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

1. Основы алгебры. Элементы алгебры. Матрицы.
2. Действия над матрицами.
3. Определители 2-3-го порядка.
4. Свойства определителей.
5. Минор матрицы.
6. Алгебраическое дополнение.
7. Обратная матрица.
8. Система СЛАУ. Метод Крамера. Метод Гаусса.
9. Понятие о теории множеств.
10. Операции над множествами.
11. Числа. Числовые последовательности.
12. Предел последовательности. Свойства предела последовательности.
13. Системы координат. Понятие функции. Предел функции.
14. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.

15. Непрерывность функции. Производная функции.
16. Основные формулы производной.
17. Дифференцируемость функций. Понятие дифференциала функции.

18. Дифференциал аргумента. Дифференциал функции.
19. Полное исследование функции с помощью производной.
20. Схема исследования функции.
21. Первообразная функция. Неопределенный интеграл.
22. Основные формулы интегрирования.
23. Интегрирование методом замены переменных. Интегрирование “по частям”.
24. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.
25. Элементы комбинаторики. Перестановка. Размещение. Сочетание.
26. Основы теории вероятности.

УЧЕБНЫЙ НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ КОМПЛЕКС
МЕЖДУНАРОДНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ КЫРГЫЗСТАНА
Кафедра: «ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫЕ ДИСЦИПЛИНЫ»
Направление: Юриспруденция
Дисциплина «Математика»
Экзаменационный билет № 1

1. Множества. Операции над множествами.
2. Исследовать на экстремум функции $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - (F + N)$
3. Вычислить предел. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$

Зав. каф. ЕНД _____ Басина О.Н.

УЧЕБНЫЙ НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ КОМПЛЕКС
МЕЖДУНАРОДНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ КЫРГЫЗСТАНА
Кафедра: «ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫЕ ДИСЦИПЛИНЫ»
Направление: Юриспруденция
Дисциплина «Математика»
Экзаменационный билет №2

1. Числовые последовательности. Способы определения последовательности.
2. Даны множества A ={ -5; -4; - 2; 5; 7; F; F+N} и
B = {-F; -N; - 3; 1; 5; 7; 11}. Найти объединение, пересечение и разность этих множеств.
3. Исследовать монотонности функций: $f(x) = x^2 - 8x + (F - N)$,

Зав. каф. ЕНД _____ Басина О.Н.

УЧЕБНЫЙ НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ КОМПЛЕКС
МЕЖДУНАРОДНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ КЫРГЫЗСТАНА
Кафедра: «ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫЕ ДИСЦИПЛИНЫ»
Направление: Юриспруденция
Дисциплина «Математика»
Экзаменационный билет №3

1. Предел последовательности. Свойства предела последовательности.
2. Исследовать на экстремум функции $f(x) = x^2 - 4x + (F - N)$.
3. Даны множества A ={ -8; -4; - 2; 5; 7; F; F+N} и
B = {-F; -N; - 3; 1; 5; 7; 11}. Найти объединение, пересечение и разность этих множеств.

Зав. каф. ЕНД _____ Басина О.Н.

Раздел7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

7.1.Список источников и литературы

1. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. - Москва: Наука, 2012г. (или другое издание).
2. Панков П.С. Математика для дипломатов и юристов. Учебное пособие. – Бишкек: МУК, 2011г..
3. Байзаков А. Теория вероятностей и математическая статистика. - Бишкек: КНУ, 2015 (или другое издание).
4. Ким В.Л., Бостериева В.К., Федорова Е.С. Высшая математика. Учебное пособие для студентов дистанционного обучения КНУ по специальности «Юриспруденция». – Бишкек: КНУ, 2012г..
5. Кожомбердиева Н.Б.,Сейтбеков А., Толубаева Ж.Ж. «Элементы линейной алгебры». Учебное пособие . г. Бишкек. Издательствво «Айат». -2013г.

7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимый для освоения дисциплины (модулей)

1.http://kyrlibnet.kg/ru/ec/
2.http://www.biblioteka.kg/
3.www.iprbookshop.ru
4.http://ilim.box/
5.https://www.who.int/hinari/en/
6.http://search.epnet.com/
7.https://www.cambridge.org/core
8.http://library.iuk.kg/ru/

Раздел8. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся.

8.1. Планы практических (семинарских) и лабораторных занятий. Методические указания по организации и проведению

Практические занятия

№ темы	Наименование и краткое содержание занятий	Характер и цель занятия, формируемые компетенции	К-во ч-в	К-во б-в
	1 семестр 1 модуль			**100**
Пр.1	О месте и роли математики в современном мире. Основы алгебры. Элементы алгебры. Матрицы.	Цель: *закрепление знаний о основы алгебры, элементы алгебры, матрицы.* Основные вопросы: *Подбор примеров в различных матрицах.*	1	
Пр.2	Действия над матрицами.	Цель: *закрепление знаний о действиях над матрицами.* Основные вопросы: *Подбор примеров различных действий над матрицами.*	1	
Пр.3	Определители 2-3-го порядка. Свойства определителей	Цель: *закрепление знаний о свойствах определителей.* Основные вопросы: *Подбор примеров различных действий определители 2-3-го порядка.*	1	
	Алгебраическое дополнение.	Цель: *закрепление знаний о алгебраических дополнений.* Основные вопросы: *Подбор примеров различных действий алгебраических дополнений.*	1	

Пр.5	Обратная матрица.	Цель: *закрепление знаний о обратной матрице.* Основные вопросы: *Подбор примеров различных действий об обратной матрице.*	1	
Пр.6	Система СЛАУ. Метод Крамера. Метод Гаусса.	Цель: *закрепление знаний о системе уравнений.* Основные вопросы: *Подбор примеров различных действий методом Крамера, методом Гаусса.*	1	
Пр.7	Понятие о теории множеств. Операции над множествами.	Цель: *закрепление знаний о множествах.* Основные вопросы: *Подбор примеров различных определений «множеств».*	1	
Пр.8	Числа. Числовые последовательности. Предел последовательности. Свойства предела последовательности.	Цель: *закрепление знаний о числовых последовательностях.* Основные вопросы: *Подбор примеров на различные формы задания числовых последовательностей: формульный, рекуррентный, “и т. д.”, графический.*	1	
	2 модуль			**100**
Пр.9.	Системы координат. Понятие функции. Предел функции. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.	Цель: *закрепление знаний о функциях и их представлении.* Основные вопросы: *Подбор примеров на различные способы задания раскрытие неопределенностей.*	1	
Пр.10	Непрерывность функции. Производная функции. Основные формулы производной.	Цель: *закрепление знаний по непрерывность функции и по производной элементарных функций.* Основные вопросы: *Решение задач на нахождение производной элементарных и сложных функций. Производная умножения и деления двух функций, предложенных студентами.*	1	
Пр.11	Дифференцируемость функций. Понятие дифференциала функции. Дифференциал аргумента. Дифференциал функции.	Цель: *закрепление знаний о понятие дифференциала функции* Основные вопросы*: Подбор примеров, подготовленных студентами и на хождение дифференциала функции.*	1	
Пр.12	Полное исследование функции с помощью производной. Схема исследования функции.	Цель: *закрепление знаний о схеме исследований функции.* Основные вопросы*: Подбор примеров, и на полное исследование функции с помощью производной.*	1	
Пр.13	Первообразная функция. Неопределенный интеграл. Основные формулы интегрирования.	Цель: *закрепление знаний о неопределенном интеграле и таблицы интегралов.* Основные вопросы*: Подбор примеров, подготовленных студентами и на*	1	

		хождение первообразной непосредственным интегрированием.		
Пр.14	Интегрирование методом замены переменных. Интегрирование “по частям”.	Цель: *закрепление знаний по интегрированию.* Основные вопросы: *Подбор под интегральных функций, интегрируемых методом замены переменны и «по - частям» в неопределенных интегралах. Различные случаи обозначений.*	1	
Пр.15	Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Методы интегрирования определенного интеграла.	Цель: *закрепление знаний об определенном интеграле, закрепление знаний по геометрии (площади различных фигур).* Основные вопросы: *Подбор примеров и вычисление определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница.*	1	
Пр.16	Элементы комбинаторики. Перестановка. Размещение. Сочетание. Основы теории вероятности.	Цель: *закрепление знаний по элементам комбинаторики.* Основные вопросы: *Комбинаторика. Решение комбинаторных задач. Основы теории вероятности.*	1	
Пр.17	Итоговая		1	
Количество 17ч.				

8.2. Методические рекомендации по СРС:
Тематика СРС, рефератов теоретическая часть (лекции)

Тема1: Основы алгебры. Элементы алгебры. Матрицы.
Цель: *углубление знаний о действиях над матрицами.*
Задание: *Подбор примеров различных действий над матрицами.*

Тема2: Обратная матрица.
Цель: *закрепление знаний о обратной матрице.*
Задание: *Подбор примеров различных действий об обратной матрице.*

Тема3: Система СЛАУ. Метод Крамера. Метод Гаусса.
Цель: *закрепление знаний о системе уравнений.*
Задание: *Подбор примеров различных действий методом Крамера, методом Гаусса.*

Тема4: *Теория множеств. Структуры на множествах.*
Цель: *углубление знаний о различных математических структурах.*
Задание: *Подобрать пример множества со структурой из какой-либо области знания.*

Тема5: Числа. *Числовые последовательности.*
Цель: *углубление знаний о числовых последовательностях.*
Задание: *Подбор примеров на последовательности с различными свойствами.*

Тема6: *Системы координат и понятие функции.*
Цель: *углубление знаний о функциях и их представлении.*
Задание: *Подбор примеров на функции вещественной переменной с различными свойствами.*

Тема7: *Определение производной функции. Производные элементарных функций.*
Цель: углубление знаний по производной элементарных функций, углубление знаний по производной сложных функций.
Задание: Подбор примеров на вычисление производных от арифметических действий над функциями различными способами.

Тема8: *Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.*
Цель: углубление знаний по раскрытию неопределенностей.
Задание: Подбор интересных примеров на вычисление производных от суперпозиции функций и обратной функции различными способами.

Тема9: *Понятие дифференциала функции. Использование производной для приближенного вычисления значения функции.*
Цель: *углубление знаний по дифференциалу функции, углубление знаний по оптимизации.*
Задание: *Подбор задач самостоятельно и их решение. Вычислении значений функций с помощью производной.*

Тема10: *Полное исследование функции с помощью производной.*
Цель: *углубление знаний по суммированию и интегрированию.*
Задание: *Подбор формулы для функции, имеющей красивый или оригинальный график. Проведение полного исследования этой функции методами дифференциального исчисления.*

Тема11: *Первообразная функции. Неопределенный интеграл.*
Цель: Углубление знаний по формулам интегрирования.
Задание: *Найти (придумать) примеры функций и проинтегрировать их.*

Тема12: *Интегрирование методами замены переменных и «по-частям»*
Цель: Углубление знаний об интегрировании методами замены переменных и «по-частям»
Задание: *Подобрать примеры подинтегральных функций, интегрируемых методом замены переменных и интегрируемых методом интегрирования «по-частям»*

Тема13: *Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Основные свойства определенного интеграла.*
Цель: *закрепление знаний об определенном интеграле, закрепление знаний по геометрии (площади различных фигур).*
Задание: *Подбор примеров и вычисление определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница.*
Тема14: *Комбинаторика. Основы теории вероятности.*
Цель: закрепление знаний по элементам комбинаторики и о теории вероятности.
Задание: Комбинаторика. Решение комбинаторных задач. Основы теории вероятности.

Раздел9. Материально-техническое обеспечение дисциплины
В качестве материально-технического обеспечения дисциплины указывается необходимое для обучения оборудование, демонстрационные приборы, мультимедийные средства, учебные фильмы, тренажеры, карты, плакаты, наглядные пособия; требования к аудиториям – компьютерные классы, академические или специально оборудованные аудитории и лаборатории, наличие доски и т.д.

Раздел 10. ГЛОССАРИЙ

Первичное понятие - понятие, не определяемое через другие понятия.

Аксиома - положение, использующее *первичные понятия* и логические понятия и принимаемое без доказательства.

Теорема - логическое следствие из *аксиом.*

Интерпретация *(жүзөгө келтиртүү)* - постановка понятию в соответствие реального процесса или объекта.

Множество - *первичное понятие,* объединяющее понятия «совокупность», «набор», «группа» и т.д.

Структура - совокупность взаимосвязанных аксиом на *множестве* и возникающий таким образом математический объект.

Пространство (с соответствующим прилагательным) - общее название *структур*, связанных с непрерывностью.

Зона - общее название *пространства* или его части с нарушением непрерывности.

Декартова или *прямоугольная система координат* - наиболее простой способ записи точек парами чисел (на плоскости) и тройками чисел (в пространстве).

Оптимизационная задача - задача на поиск «наилучшей» (наименьшей, наибольшей) из имеющихся возможностей.

Обратная оптимизационная задача - по заданному объекту задача на поиск такого показателя (критерия), по которому решение *оптимизационной задачи* будет этим объектом.

Уравнение - общее название для задач типа: по заданной *функции* и заданному значению найти неизвестный объект такой, что функция от него принимает это значение.

Дифференцирование – вычисление *производной* от функции.

Первообразная – функция, у которой данная *производная.*

Определенный интеграл от заданной функции на заданном интервале (неформально) – алгебраическая сумма площадей между графиком функции и, площади ниже оси абсцисс берутся с минусом.

Неопределенный интеграл от заданной функции – совокупность *первообразных* функции.

Функция (отображение, преобразование) - названия для переменной величины, зависящей от другой (других) переменных величин, а также для самой зависимости.

Предел *(*кыргызча: *предел)* - общее название для постоянной величины такой, что переменная величина бесконечно приближается к ней.

Бесконечно малая величина – 1) условное название для последовательностей и функций, имеющих своим пределом ноль;

2) неформальное понятие, используемое для нестрогого составления математических моделей процессов и явлений и вывода нестрогого формул математического анализа (в последнем случае в дальнейшем требуется доказательство в соответствии с 1-м значением).

Система уравнений - общее название для задач типа: по нескольким заданным *функциям* и заданным значениям найти неизвестный объект такой, что все заданные функции от него принимают соответствующие значения.

Решение – 1) процесс получения неизвестного объекта, удовлетворяющего *уравнению* или *системе уравнений (*кыргызча: *чыгаруу);*

2) найденное значение (или одно из значений) этого неизвестного объекта *(*кыргызча: *чыгарылыш).*

Раздел 11. ПРИЛОЖЕНИЙ